

# III. Vektorok

## Vektorok összege, különbsége és vektor szorzása számmal



**2282.** a) egyenlő vektorok:  $\mathbf{f} = \mathbf{c}$ ; b) ellentett vektorok:  
 $\mathbf{a} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b} + \mathbf{e} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{g} + \mathbf{h} = \mathbf{0}$ .

**2283.** Legyen  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ;  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$ ;  $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$ ;  $\overrightarrow{DA} = \mathbf{d}$ ;  $\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}$ ;  
 $\overrightarrow{BD} = \mathbf{f}$ .  $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ ,  
 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{f} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e} = \mathbf{0}$ .

**2284.** a)  $\mathbf{g} = \mathbf{f} + \mathbf{a}$ ; b)  $\mathbf{h} = -\mathbf{f} - \mathbf{a}$ ; c)  $\mathbf{k} = -2\mathbf{g} + \mathbf{i}$ .

**2285.** a)  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ; b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$ ;  
c)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$ ;  
d)  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$ ;  
e)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ .

**2286.** a)  $\mathbf{c} - \mathbf{a} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{d}$ ; b)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EA} = \mathbf{a} - \mathbf{e}$ ;  
c)  $\mathbf{a} + \mathbf{d} - \mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{c} - \mathbf{b} = -\mathbf{b} = \overrightarrow{KG}$ ;  
d)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{d} - \mathbf{e} = \mathbf{a} - \mathbf{d} + \mathbf{b} - \mathbf{e} = -2\mathbf{e} + \mathbf{b} - \mathbf{e} = -2\mathbf{e} + 2\mathbf{a} = \overrightarrow{KH}$ .

**2287.** Legyen az  $AB$  szakasz felezőpontja  $H$ , az  $S$  súlypont  $H$  pontra vonatkozó tükörképe  $S'$  pont. Felhasználjuk, hogy  $S$  harmadolja  $HC$ -t  $\Rightarrow \overrightarrow{HS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$  és  $\overrightarrow{S'S} = \overrightarrow{SC}$ .

a)  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SS'} + \overrightarrow{SC} = \mathbf{0}$ ; b)  $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{BA}$ ;  
c)  $\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{CB}$ ; d)  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SS'} - \overrightarrow{SC} = -2\overrightarrow{SC}$ .

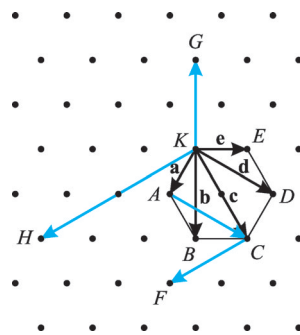
**2288.** a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OO'}$ , ahol  $O'$  pont az  $O$  pont  $AB$  egyenesre vonatkozó tükörképe. b)  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CA}$ .

**2289.** Az ábrán vázolt  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  egy lehetséges megoldás, mert  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ .

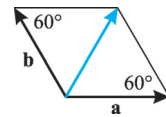
**2290.** Az ábrán vázolt  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  egy lehetséges megoldás, mert  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ .

**2291.** a)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{v}$ ; b)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = -\mathbf{v}$ .

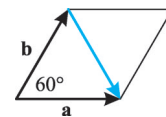
**2286.**



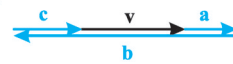
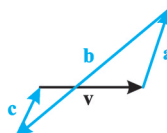
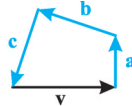
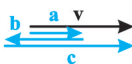
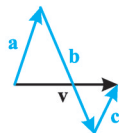
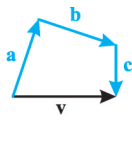
**2289.**



**2290.**

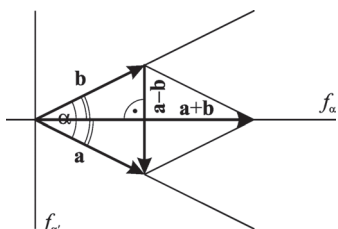


**2291/I.**



**2291/II.**

2296.



**2292.** 1. eset:  $|a| = |b|$ ,  $a$  és  $b$  vektor nem párhuzamos. A paralelogramm módszer szerint  $a + b$  és  $a - b$  vektor egy  $|a| = |b|$  oldalú rombusz átlói.  $\Rightarrow a + b \perp a - b$ .

2. eset:  $|a| = |b|$  és  $a \parallel b \Rightarrow a = b$  vagy  $a = -b$ . Ha  $a = b$ , akkor  $a + b = 2a$  és  $a - b = 0 \Rightarrow a + b \perp a - b = 0$ . Ha  $a = -b$ , akkor  $a + b = 0$  és  $a - b = -2b \Rightarrow a + b = 0 \perp a - b$ .

**2293.** 1. eset:  $a + b \neq 0$ ,  $a - b \neq 0$  és  $a + b \perp a - b \Rightarrow A$  paralelogramm módszer szerint  $a + b$  és  $a - b$  vektor egy  $|a| = |b|$  oldalú rombusz átlói.

2. eset:  $a + b = 0 \Rightarrow a = -b \Rightarrow |a| = |b|$ .

3. eset:  $a - b = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow |a| = |b|$ .

**2294.** 1. eset:  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  és  $a \perp b$ . A paralelogramm módszer szerint  $a + b$  és  $a - b$  egy téglalap átlói.  $\Rightarrow |a + b| = |a - b|$ .

2. eset:  $a = 0 \Rightarrow a + b = b$  és  $a - b = -b \Rightarrow |a + b| = |a - b|$ .

3. eset:  $b = 0 \Rightarrow a + b = a$  és  $a - b = a \Rightarrow |a + b| = |a - b|$ .

**2295.** 1. eset:  $a + b$  és  $a - b$  vektorok nem párhuzamosak és  $|a + b| = |a - b|$ . Ekkor a paralelogramm módszer szerint  $a + b$  és  $a - b$  egy téglalap átlói.  $\Rightarrow a \perp b$ .

2. eset:  $(a + b) \parallel (a - b)$  és  $|a + b| = |a - b| \Rightarrow$  vagy  $a + b = a - b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a \perp b$  vagy  $a + b = -(a - b) \Rightarrow a = 0 \Rightarrow a \perp b$ .

**2296.**  $|a| = |b|$ ,  $a$  és  $b$  nem párhuzamosak  $\Rightarrow a + b$  és  $a - b$  vektorok az  $a$  és  $b$  által kifeszített rombusz átlóvektorai, amelyek felezik a rombusz szögeit  $\Rightarrow (a + b) \parallel f_{\alpha}$ , illetve  $(a - b) \parallel f_{\beta}$ . A megoldás  $k \cdot (a + b)$  vektor, ahol  $k$  nullától különböző valós szám. Végtelen sok megoldás van.

**2297.**  $\vec{AB} = \vec{DC}$ , azaz  $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OD} \Rightarrow \vec{OB} + \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OC}$ .

**2298.**  $a = -a \Rightarrow a + a = 0 \Rightarrow a = 0$ . A nullvektor egyenlő az ellentettjével.

**2299.** a) Bármely négy pontra  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$ ;

b)  $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{BA} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{AD} = 2\vec{AD} \Rightarrow \vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{AD}$ ;

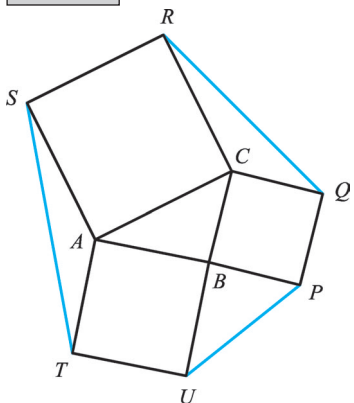
c)  $\vec{AD} + \vec{AC} = \vec{BC} + \vec{AC} = \vec{BC} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{BC}$ .

**2300.**  $d = \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OA} + \vec{BC} = a + c - b$

**2301.** a)  $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OB} + 2\vec{BP} = \vec{OB} + 2(\vec{OP} - \vec{OB}) \Rightarrow \vec{OC} = b + 2(p - b) = 2p - b$ .

b)  $\vec{AC} = \vec{AO} + \vec{OC} = -a + 2p - b$ .

2303.



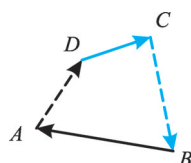
**2302.**  $a + b + c = \frac{1}{2} (\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$  és

$x = c + 2a + b = (c + a + b) + a = 0 + a = a$ . Geometriai jelentése: a háromszög középvonala párhuzamos a nem felezett oldallal, és fele olyan hosszú.

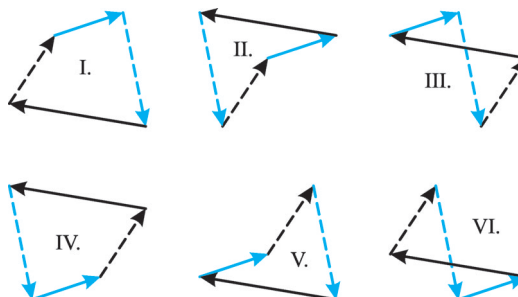
**2303.** Az ábra jelölései szerint  $U$  és  $P$ ,  $Q$  és  $R$ ,  $S$  és  $T$  „szomszédos csúcsok”.  $\vec{BP} = \vec{CQ}$ ;  $\vec{CR} = \vec{AS}$ ;  $\vec{BU} = \vec{AT}$  egyenlőségeket felhasználva:  $\vec{UP} = \vec{BP} - \vec{BU} = \vec{CQ} - \vec{AT}$  és  $\vec{QR} = \vec{CR} - \vec{CQ} = \vec{AS} - \vec{CQ}$  és  $\vec{ST} = \vec{AT} - \vec{AS} \Rightarrow \vec{UP} + \vec{QR} + \vec{ST} = 0 \Rightarrow A$   $QR$ ,  $ST$ ,  $UP$  szakaszokkal párhuzamosan szerkeszthető  $QR$ ,  $ST$ ,  $UP$  oldalú háromszög.

**2304.** A vektorösszeadás kommutatív.  $\Rightarrow$  A négy vektor összege minden esetben nullvektor.  $\Rightarrow$  A négy vektor négyszöget alkot.

2304/I.



2304/II.



1. eset:  $\vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CB} + \vec{BA} = \mathbf{0}$ . (I.)

2. eset:  $\vec{AD} + \vec{DC} + \vec{BA} + \vec{CB} = \mathbf{0}$ . (II.)

3. eset:  $\vec{AD} + \vec{BA} + \vec{DC} + \vec{CB} = \mathbf{0}$ . (III.)

4. eset:  $\vec{AD} + \vec{BA} + \vec{CB} + \vec{DC} = \mathbf{0}$ . (IV.)

5. eset:  $\vec{AD} + \vec{CB} + \vec{BA} + \vec{DC} = \mathbf{0}$ . (V.)

6. eset:  $\vec{AD} + \vec{CB} + \vec{DC} + \vec{BA} = \mathbf{0}$ . (VI.)

2305.  $\mathbf{a} - \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$ .  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  egy derékszögű háromszög befogói;  $\mathbf{a}$  az átfogó, és  $|\mathbf{a}| = 2 \cdot |\mathbf{b}|$ , ezért  $\sphericalangle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = 60^\circ$ .

2306. A feltételnek eleget tevő vektorok egy szabályos háromszög oldalvektorai, ezért a szomszédosak egymással  $120^\circ$ -ot zárnak be.

2307.  $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$  és  $O'$  az  $O$  pont  $AB$  egyenesre vonatkozó tükörképe.

$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OO'} + \vec{OC} = \vec{OC} + \vec{CP} = \vec{OP}$ . Mivel  $OO' \perp AB$ , ezért  $\vec{CP} \perp AB \Rightarrow P$  pont rajta van az  $ABC$  háromszög  $m_c$  magasságvonalán. Hasonlóan belátható, hogy  $P$  az  $m_a$  és az  $m_b$  magasságvonalnak is pontja.  $\Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM}$ , ahol  $M$  a háromszög magasságpontja.

2308. Legyen  $\vec{AB} = \mathbf{a}$ ;  $\vec{AD} = \mathbf{b}$  és  $\vec{AE} = \mathbf{c}$ . a)  $\vec{AF} = \mathbf{a} + \mathbf{c} = \vec{DG}$ ,  $\vec{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \vec{EG}$ ,  $\vec{AH} = \mathbf{b} + \mathbf{c} = \vec{BG}$ ,  $\vec{BE} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = \vec{CH}$ ,  $\vec{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \vec{FH}$ ,  $\vec{DE} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = \vec{CF}$ ;

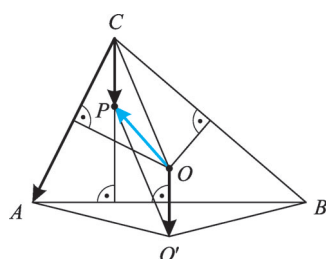
b)  $\vec{AG} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\vec{EC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ ,  $\vec{DF} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\vec{BH} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ .

2309.  $\vec{AH} = 2\mathbf{z}$ ;  $\vec{AC} = 2\mathbf{y}$ ;  $\vec{AF} = 2\mathbf{x}$ ;  $\vec{FH} = 2\mathbf{z} - 2\mathbf{x}$ ;  $\vec{CH} = 2\mathbf{z} - 2\mathbf{y}$ ;  $\vec{FC} = 2\mathbf{y} - 2\mathbf{x}$ .

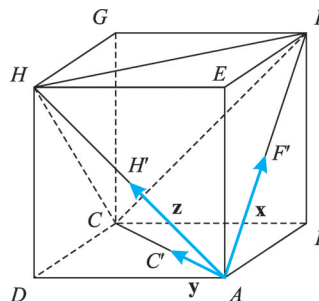
a)  $\vec{AB} = \vec{AC'} + \vec{C'B} = \mathbf{y} + \frac{1}{2} \vec{HF} = \mathbf{y} - \mathbf{z} + \mathbf{x}$ ,  $\vec{AD} = \vec{AC'} + \vec{C'D} = \mathbf{y} + \frac{1}{2} \vec{FH} = \mathbf{y} + \mathbf{z} - \mathbf{x}$ ,

$\vec{AE} = \vec{AH'} + \vec{H'E} = \mathbf{z} + \frac{1}{2} \vec{CF} = \mathbf{z} - \mathbf{y} + \mathbf{x}$ ;

2307.



2309.



$$b) \vec{AG} = \vec{AC} + \vec{CG} = 2\mathbf{y} + \mathbf{z} - \mathbf{y} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad \vec{CE} = \vec{CA} + \vec{AE} = -2\mathbf{y} + \mathbf{z} - \mathbf{y} + \mathbf{x} = \\ = \mathbf{x} - 3\mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad \vec{DF} = \vec{DH} + \vec{HF} = \mathbf{z} - \mathbf{y} + \mathbf{x} + 2\mathbf{x} - 2\mathbf{z} = 3\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z}, \quad \vec{BH} = \vec{BF} + \vec{FH} = \\ = \mathbf{z} - \mathbf{y} + \mathbf{x} + 2\mathbf{z} - 2\mathbf{x} = -\mathbf{x} - \mathbf{y} + 3\mathbf{z}.$$

**2310.** A 2309. ábra jelöléseit használjuk. Az  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  vektorok által kifeszített tetraéder a kockába írt  $AFHC$  szabályos tetraédernek az  $A$  középpontú  $\lambda = \frac{1}{2}$  arányú hasonlósággal kapott képe.  $\Rightarrow$  élei  $60^\circ$ -os szöget zárnak be  $\Rightarrow \sphericalangle(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sphericalangle(\mathbf{y}; \mathbf{z}) = \sphericalangle(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = 60^\circ$ .

**2311.** Legyen  $\vec{AB} = \mathbf{a}$ ;  $\vec{AC} = \mathbf{b}$  és  $\vec{AD} = \mathbf{c}$ .  $\vec{BC} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ ;  $\vec{BD} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ ;  $\vec{CD} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$ .

**2312.**  $\vec{CD} = \mathbf{a}$ ;  $\vec{AD} = \mathbf{b}$ ;  $\vec{FD} = \mathbf{c}$ ;  $\vec{AE} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = \vec{FC}$ ;  $\vec{CE} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = \vec{FA}$ ;  $\vec{DE} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = \vec{FB}$ .

**2313.** Legyen  $\vec{AB} = \mathbf{a}$ ;  $\vec{AD} = \mathbf{b}$  és  $\vec{AE} = \mathbf{c}$ . a)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \vec{AG}$ , kockacsúcsba mutat.

b)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \vec{EC}$ , nem mutat kockacsúcsba. c)  $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \vec{AF}$ , kockacsúcsba mutat.

d)  $\mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0} = \vec{AA}$ , kockacsúcsba mutat. e)  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \vec{DB}$ , nem mutat kockacsúcsba.

f)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} = \vec{AH}$ , kockacsúcsba mutat.

**2314.** Például egy kocka egy csúcsból induló három élvektora esetén két élvektor összege egy lapátló vektor, amely merőleges a vele közös csúcsból induló harmadik élvektorra.

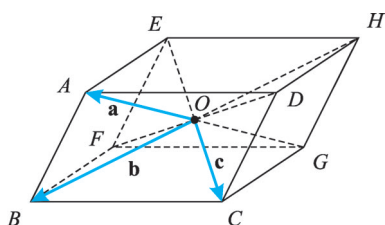
**2315.**  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ;  $\vec{OG} = -\mathbf{a}$ ;  $\vec{OB} = \mathbf{b} \Rightarrow \vec{OH} = -\mathbf{b}$ ;  $\vec{OC} = \mathbf{c}$ ;  $\vec{OE} = -\mathbf{c}$ ;  $\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = \\ = \vec{OC} + \vec{BA} = \mathbf{c} + \mathbf{a} - \mathbf{b}$ ;  $\vec{OF} = \mathbf{b} - \mathbf{a} - \mathbf{c}$ .

**2316.**  $AB = BC$ ,  $OB$  oldal közös és  $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COB = 90^\circ \Rightarrow AOB\Delta \cong BOC\Delta \Rightarrow OA = OC \Rightarrow AOC\Delta$  egyenlő szárú derékszögű háromszög. Hasonlóan igazolható, hogy  $AOB\Delta$  és  $BOC\Delta$  is egyenlő szárú derékszögű háromszög. Az  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$  egyenlő hosszúságú, páronként merőleges vektorok olyan kockát határoznak meg, amelynek az adott tetraéder élei a lapátlói, az  $O$  ponttal átellenes csúcsa pedig  $D \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OQ} + \vec{OC} = \vec{OD}$ .

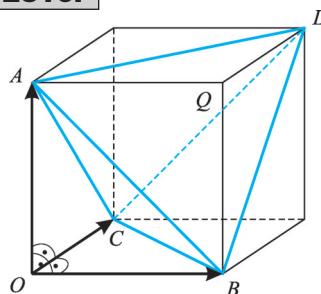
**2317.**  $2\mathbf{a}$ ;  $1,5\mathbf{a}$ ;  $3\mathbf{a}$ ;  $\frac{\mathbf{a}}{2}$  egyirányú az  $\mathbf{a}$  vektorral.  $(-2\mathbf{a})$ ;  $(-2,5\mathbf{a})$  ellentétes irányú az  $\mathbf{a}$  vektorral. A szerkesztendő vektorok hossza 2-szerese, 1,5-szerese, 3-szorosa, 2,5-szerese, illetve fele az  $\mathbf{a}$  vektor hosszának.

**2318.**  $2\mathbf{b}$ ;  $0,5\mathbf{b}$ ;  $\frac{\mathbf{b}}{3}$ ;  $\frac{4}{5}\mathbf{b}$ ;  $\frac{\mathbf{b}}{4}$  egyirányú a  $\mathbf{b}$  vektorral.  $(-\frac{4}{3}\mathbf{b})$ ;  $(-\mathbf{b})$  ellentétes irányú a

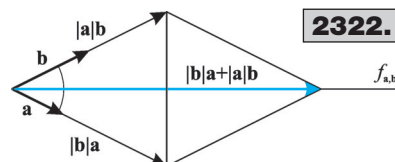
2315.



2316.



$\mathbf{b}$  vektorral. A szerkesztendő vektorok hossza  $\frac{4}{3}$ -szoros-  
sa, 2-szerese, fele, harmada,  $\frac{4}{5}$ -e, 1-szerese, illetve  
negyede a  $\mathbf{b}$  vektor hosszának.



**2322.**

**2319. 2320.** A feladatok megoldását az olvasóra  
bízjuk.

**2321.**  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$  és  $\lambda(\vec{DE} + \vec{EA}) = \lambda \cdot \vec{DA} \Rightarrow \vec{AD} = \lambda \cdot \vec{DA} \Rightarrow \lambda = -1$ .

**2322.** Legyen az  $\mathbf{a}$  vektor hossza  $a$  és a  $\mathbf{b}$  vektor hossza  $b$ . A  $|\mathbf{b}| \cdot \mathbf{a}$  vektor hossza  $b \cdot a$ , iránya egyezik  $\mathbf{a}$  vektor irányával. Az  $|\mathbf{a}| \cdot \mathbf{b}$  vektor hossza  $a \cdot b$ , iránya egyezik  $\mathbf{b}$  vektor irányával. Az  $\mathbf{a}$  és a  $\mathbf{b}$  vektor nem párhuzamosak.  $\Rightarrow |\mathbf{b}| \cdot \mathbf{a}$  vektor sem párhuzamos  $|\mathbf{a}| \cdot \mathbf{b}$  vektorral. A két nem párhuzamos, egyenlő hosszúságú vektor összegét egy  $a \cdot b$  oldalú rombusz átlója határozza meg. Ez az átló párhuzamos az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok szögének szögfelezőjével.



### Vektorműveletek alkalmazásával bizonyítható állítások

**2323.**  $\vec{OF} = \vec{OA} + \vec{AF} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AB} = \vec{OA} + \frac{1}{2} (\vec{OB} - \vec{OA}) = \frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB}$ , azaz

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{b}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}.$$

**2324.**  $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH} = \vec{OA} + \frac{1}{3} \vec{AB} = \vec{OA} + \frac{1}{3} (\vec{OB} - \vec{OA}) = \frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{3}$ , azaz  $\mathbf{h} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}$ ;

$\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG} = \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{AB} = \vec{OA} + \frac{2}{3} (\vec{OB} - \vec{OA}) = \frac{\vec{OA} + 2\vec{OB}}{3}$ , azaz  $\mathbf{g} = \frac{\mathbf{a} + 2\mathbf{b}}{3}$ .

**2325.**  $AP : PB = \lambda : \mu$ ;  $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OA} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \vec{AB} = \vec{OA} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (\vec{OB} - \vec{OA}) = \frac{\mu \cdot \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{OB}}{\lambda + \mu}$ , azaz  $\mathbf{p} = \frac{\mu \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b}}{\lambda + \mu}$ .

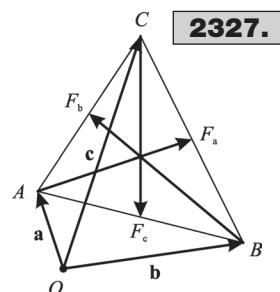
**2326.**  $\vec{OP} = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$  és  $\vec{OQ} = -2\mathbf{a} + \mathbf{b}$  és  $\vec{OF} = \frac{1}{2} (\vec{OP} + \vec{OQ}) \Rightarrow \mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2}$ .

**2327.**  $\mathbf{f}_c = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ ;  $\mathbf{f}_a = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$ ;  $\mathbf{f}_b = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2}$ .  $\vec{CF}_c = \mathbf{f}_c - \mathbf{c} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}}{2}$ ;  $\vec{AF}_a = \mathbf{f}_a - \mathbf{a} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c} - 2\mathbf{a}}{2}$ ;  $\vec{BF}_b = \mathbf{f}_b - \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c} - 2\mathbf{b}}{2}$ ;  $\vec{CF}_c + \vec{AF}_a + \vec{BF}_b = \mathbf{0}$ .

Tehát a  $CF_c$ , az  $AF_a$  és a  $BF_b$  súlyvonalakból a kívánt módon háromszög szerkeszthető.

**2328.**  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ;  $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ;  $\vec{OC} = \mathbf{c}$ ;  $AB$  felezőpontja  $F \Rightarrow \vec{OF} = \mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ ;  $BC$  felezőpontja  $G \Rightarrow \vec{OG} = \mathbf{g} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$ ;

$CA$  felezőpontja  $H \Rightarrow \vec{OH} = \mathbf{h} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{a}}{2}$ ;  $\mathbf{f} + \mathbf{g} + \mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ .



**2327.**

**2329.** Legyen  $\vec{OA}_i = \mathbf{a}_i$  és a felezéspont  $F_i$ , amelyre  $\vec{OF}_i = \mathbf{f}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).  $\mathbf{f}_i = \frac{\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}}{2}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) és  $\mathbf{f}_n = \frac{\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_1}{2} \Rightarrow \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \dots + \mathbf{f}_n = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2} + \frac{\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3}{2} + \dots + \frac{\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n}{2} + \frac{\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_1}{2} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n$ .

**2330.** Legyen  $\vec{OA}_i = \mathbf{a}_i$  és a harmadolópont  $H_i$ , amelyre  $\vec{OH}_i = \mathbf{h}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).  $\mathbf{h}_i = \frac{2\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}}{3}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) és  $\mathbf{h}_n = \frac{2\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_1}{3} \Rightarrow \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \dots + \mathbf{h}_n = \frac{2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{3} + \frac{2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3}{3} + \dots + \frac{2\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n}{3} + \frac{2\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_1}{3} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n$ .

**2331.** Felhasználjuk: a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja.  $\vec{OF} = \mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$  és  $\vec{OS} = \mathbf{s} = \frac{2\mathbf{f} + \mathbf{c}}{3} = \frac{2 \cdot \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + \mathbf{c}}{3} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$ .

**2332.** Legyen  $O$  a helyvektorok közös kezdőpontja.  $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = \vec{OA} - \vec{OS} + \vec{OB} - \vec{OS} + \vec{OC} - \vec{OS} = \mathbf{a} - \mathbf{s} + \mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{c} - \mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - 3\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - 3 \cdot \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \mathbf{0}$ .

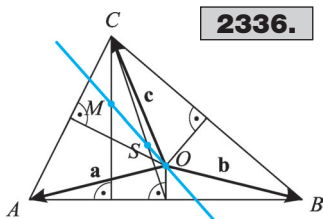
**2333.** Legyen  $O$  a helyvektorok közös kezdőpontja.  $\vec{AX} + \vec{BY} + \vec{CZ} = \vec{OX} - \vec{OA} + \vec{OY} - \vec{OB} + \vec{OZ} - \vec{OC} = \vec{OX} + \vec{OY} + \vec{OZ} - (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = 3 \cdot \vec{OQ} - 3 \cdot \vec{OS} = \underline{\underline{3\vec{SQ}}}$ .

**2334.** Legyen  $H \in AB$  és  $HA : HB = 1 : 2$ ;  $G \in BC$  és  $BG : GC = 1 : 2$ ;  $F \in CA$  és  $CF : FA = 1 : 2$ . Legyenek az  $A, B, C, F, G, H$  pontokba mutató helyvektorok  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ .  $\mathbf{h} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}$ ;  $\mathbf{g} = \frac{2\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$ ;  $\mathbf{f} = \frac{2\mathbf{c} + \mathbf{a}}{3}$ . Legyen az  $ABC\Delta$   $S$  súlypontjába mutató vektor  $\mathbf{s}$ , az  $FGH\Delta$   $T$  súlypontjába mutató vektor  $\mathbf{t}$ .  $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{h} + \mathbf{g} + \mathbf{f}}{3} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c} + 2\mathbf{c} + \mathbf{a}}{9} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \mathbf{s}$ .

**2335.** Legyenek a hatszög csúcsai a felezőpontokkal azonos körüljárási irányban  $X; Y; Z; P; Q; R$  és legyen  $XY$  felezőpontja  $A$ .  $\vec{OA} = \frac{1}{2}(\vec{OX} + \vec{OY})$ ;  $\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OZ} + \vec{OP})$ ;

$\vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{OQ} + \vec{OR})$ ;  $\vec{OB} = \frac{1}{2}(\vec{OY} + \vec{OZ})$ ;  $\vec{OD} = \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OQ})$ ;  $\vec{OF} = \frac{1}{2}(\vec{OR} + \vec{OX})$ .

Legyen az  $ACE\Delta$  súlypontja  $S$ , a  $BDF\Delta$  súlypontja  $T$ .  $\vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OF}) = \frac{1}{6}(\vec{OY} + \vec{OZ} + \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} + \vec{OX}) = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OE}) = \vec{OS} \Rightarrow \underline{\underline{T \equiv S}}$ .



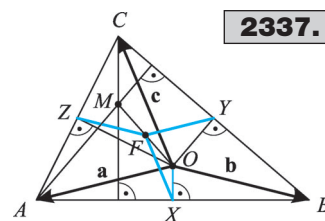
**2336.**

**2336.** Legyen  $O$  a helyvektorok közös kezdőpontja.  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ;  $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ;  $\vec{OC} = \mathbf{c}$ . A 2307. feladatban láttuk, hogy  $\vec{OM} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ . A 2331. feladatban láttuk, hogy  $\vec{OS} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \frac{1}{3}\vec{OM} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{OS}$  és  $\vec{OM}$  egyállású vektorok  $\Rightarrow$   $S; M$  és  $O$  egy egyenesen vannak  $\vec{OS} = \frac{1}{3} \vec{OM} \Rightarrow MS : SO = 2 : 1$ .

**2337.** Legyen a körülírt kör középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja.  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ;  $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ;  $\vec{OC} = \mathbf{c}$ . A 2307. feladatban láttuk, hogy  $\vec{OM} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \vec{OF} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$ .  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$

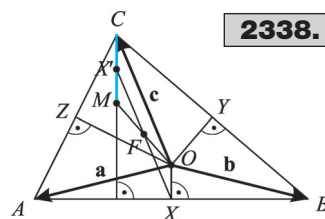
miatt  $\vec{OA} + \vec{OB} = 2 \cdot \vec{OX}$ , ahol az  $X$  az  $AB$  szakasz felezőpontja.  $\vec{OX} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} \Rightarrow \vec{XF} = \vec{OF} - \vec{OX} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} - \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} = \frac{\mathbf{c}}{2}$ . Hasonlóan belátható, hogy  $\vec{YF} = \frac{\mathbf{a}}{2}$  és  $\vec{ZF} = \frac{\mathbf{b}}{2}$ . A körülírt kör középpontja  $O$ , ezért  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| \Rightarrow |\vec{XF}| = |\vec{YF}| = |\vec{ZF}| = \frac{R}{2}$ , ahol  $R$  a körülírt kör sugara. Megjegyzés: Ez a kör az  $ABC\Delta$  Feuerbach köre.



2337.

**2338.** Legyen a körülírt kör középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja.  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ;  $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ;  $\vec{OC} = \mathbf{c}$ ;  $\vec{OX} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ . A 2307. feladatban láttuk, hogy  $\vec{OM} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \vec{OF} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$ .

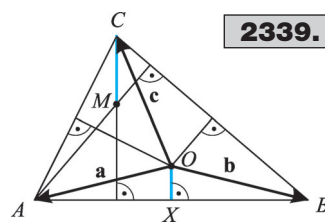
Legyen  $X'$  az  $X$  pont  $F$ -re vonatkozó tükörképe.  $\vec{OX}' = 2 \cdot \vec{OF} - \vec{OX} = 2 \cdot \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} - \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} = \frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{b}}{2} + \mathbf{c}$ . Legyen  $X''$  az  $MC$  szakasz felezőpontja.  $\vec{OX}'' = \frac{\vec{OM} + \vec{OC}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{b}}{2} + \mathbf{c} = \vec{OX}' \Rightarrow X' \equiv X'' \Rightarrow$  Az  $X$  pont  $F$ -re vonatkozó tükörképe az  $MC$  szakasz felezőpontja.



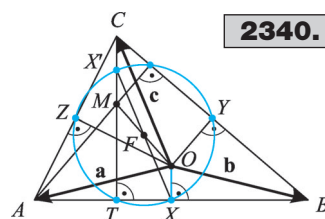
2338.

**2339.** Legyen a körülírt kör középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja.  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ;  $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ;  $\vec{OC} = \mathbf{c}$ ;  $\vec{OX} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ ;  $\vec{MC} = \vec{OC} - \vec{OM} = \mathbf{c} - (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = -(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \Rightarrow \vec{MC} = -2\vec{OX} \Rightarrow M$ -et  $\lambda = -\frac{1}{2}$  arányú,  $OM$ -nek az  $O$ -hoz közelebbi harmadolóponthára vonatkozó középpontos hasonlóság viszi át az  $X$  oldalfelező pontba.

**2340.** Legyen  $O$  a körülírt kör középpontja,  $M$  a magasságpont és  $F$  az  $OM$  szakasz felezőpontja. A 2337. feladatban láttuk, hogy  $FX = FY = FZ = R : 2$ . A 2338. feladatban láttuk, hogy  $X, Y, Z$  pontok  $F$ -re vonatkozó tükörképe felezi az  $MC$ , az  $MA$  és az  $MB$  szakaszokat. A fentiekből következik, hogy az  $X, Y, Z$  oldalfelezőpontok és az  $X', Y', Z'$  szakaszfelezőpontok rajta vannak az  $F$  középpontú,  $FX = R : 2$  sugarú körön.  $XX'$  átmérője ennek a körnek. A magasságok talppontjai vagy egybeesnek az oldalfelező pontokkal, vagy  $X'TX \sphericalangle = 90^\circ$  miatt a Thalész-tételt alkalmazva a magasságtalppontok is a fenti kör pontjai.



2339.

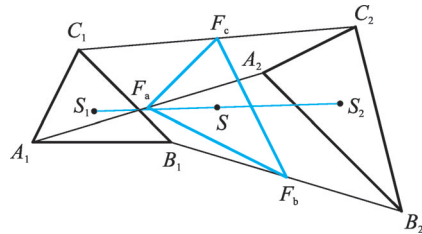


2340.

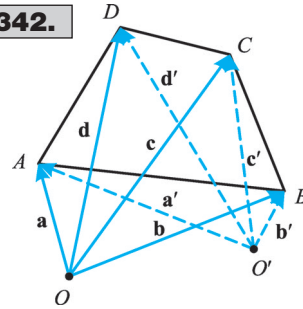




2341.



2342.



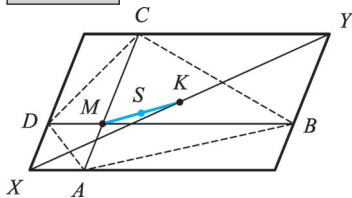
**2341.** Legyen  $O$  a helyvektorok közös kezdőpontja.  $\vec{OA}_1 = \mathbf{a}_1$ ;  $\vec{OB}_1 = \mathbf{b}_1$ ;  $\vec{OC}_1 = \mathbf{c}_1$ ;  $\vec{OA}_2 = \mathbf{a}_2$ ;  $\vec{OB}_2 = \mathbf{b}_2$ ;  $\vec{OC}_2 = \mathbf{c}_2$ ;  $\vec{OS}_1 = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1}{3}$ ;  $\vec{OS}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{c}_2}{3}$  és  $\vec{OF}_a = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2}$ ;  $\vec{OF}_b = \frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2}{2}$ ;  $\vec{OF}_c = \frac{\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2}{2}$ .  $\vec{OS} = \frac{\frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2} + \frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2}{2} + \frac{\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2}{2}}{3} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1}{3} + \frac{\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{c}_2}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{OS}_1 + \vec{OS}_2) \Rightarrow S$  felezi az  $S_1S_2$  szakaszt

**2342.**  $\vec{OS} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}$  és  $\vec{OS}' = \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \mathbf{c}' + \mathbf{d}'}{4}$ .  $\vec{OS}' = \vec{OO'} + \vec{O'S'} = \vec{OO'} + \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \mathbf{c}' + \mathbf{d}'}{4} = \frac{(\vec{OO'} + \mathbf{a}') + (\vec{OO'} + \mathbf{b}') + (\vec{OO'} + \mathbf{c}') + (\vec{OO'} + \mathbf{d}')}{4} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4} = \vec{OS} \Rightarrow S' \equiv S$ .

**2343.** Legyen  $O$  a helyvektorok közös kezdőpontja.  $AB$  felezőpontja  $E$ ;  $BC$ -é  $F$ ;  $CD$ -é  $G$ ;  $DA$ -é  $H$ .  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ;  $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ;  $\vec{OC} = \mathbf{c}$ ;  $\vec{OD} = \mathbf{d}$ .  $\vec{OE} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ ;  $\vec{OF} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$ ;  $\vec{OG} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2}$ ;  $\vec{OH} = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{a}}{2}$ .  $EG$  felezőpontja  $M_1$ ,  $\vec{OM}_1 = \frac{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4} = \vec{OS}$ .  $HF$  felezőpontja  $M_2$ ,  $\vec{OM}_2 = \frac{\frac{\mathbf{d} + \mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4} = \vec{OS}$ .  $\vec{OM}_1 = \vec{OM}_2 = \vec{OS} \Rightarrow EG$  és  $HF$  felezőpontja azonos a négyszög súlypontjával.

**2344.** Legyenek a négyszög csúcsaiba mutató helyvektorok rendre  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  és  $\mathbf{d}$ . Legyen az  $AC$  átló felezőpontja  $F_1$ , a  $BD$  átlóé  $F_2$ .  $\vec{OF}_1 = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2}$ ;  $\vec{OF}_2 = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{d}}{2}$ .  $F_1F_2$  szakasz felezőpontja  $F$ .

2345.



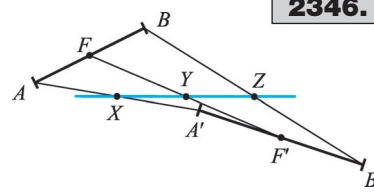
$$\vec{OF} = \frac{\vec{OF}_1 + \vec{OF}_2}{2} = \frac{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} + \frac{\mathbf{b} + \mathbf{d}}{2}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4} = \vec{OS} \Rightarrow F \equiv S.$$

**2345.** Legyenek az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  pontokba mutató helyvektorok rendre  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  és  $\mathbf{d}$ , az  $M$ -be mutató helyvektor  $\mathbf{m}$ . A 2342. feladatban láttuk, hogy az  $ABCD$  négyszög súlypontjába mutató vektor:  $\vec{OS} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}$ . A 2343. feladat-

ban láttuk, hogy a középvonalak metszéspontja a súlypont.  $XAMD$  paralelogramma, ezért  $\vec{MX} = \vec{MD} + \vec{MA}$  és  $\vec{OX} - \mathbf{m} = \mathbf{d} - \mathbf{m} + \mathbf{a} - \mathbf{m} \Rightarrow \vec{OX} = \mathbf{a} + \mathbf{d} - \mathbf{m}$ ;  $YBMC$  paralelogramma, ezért  $\vec{MY} = \vec{MC} + \vec{MB}$  és  $\vec{OY} - \mathbf{m} = \mathbf{c} - \mathbf{m} + \mathbf{b} - \mathbf{m} \Rightarrow \vec{OY} = \mathbf{c} + \mathbf{b} - \mathbf{m}$ . Az  $XY$  szakasz  $K$  felezéspontja a paralelogramma középpontja:  $\vec{OK} = \frac{\vec{OX} + \vec{OY}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{2} - \mathbf{m}$ . Az  $MK$  szakasz felezéspontja  $F$ :  $\vec{OF} = \frac{\vec{OM} + \vec{OK}}{2} = \frac{\mathbf{m} + \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{2} - \mathbf{m}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4} = \vec{OS}$ .

**2346.** Legyenek a  $A, B, F, A', B', F'$  pontokba mutató helyvektorok rendre  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{f}'$ .

$$\begin{aligned} \vec{OX} &= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}'}{2}; \quad \vec{OZ} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2}; \quad \vec{OY} = \frac{\vec{OF} + \vec{OF}'}{2} = \\ &= \frac{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{b}'}{2}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}' + \mathbf{b} + \mathbf{b}'}{4} = \frac{\vec{OX} + \vec{OZ}}{2} \Rightarrow Y \text{ pont} \end{aligned}$$



**2346.**

az  $XZ$  szakasz felezőpontja.  $\Rightarrow X, Y$  és  $Z$  egyenesen vannak.

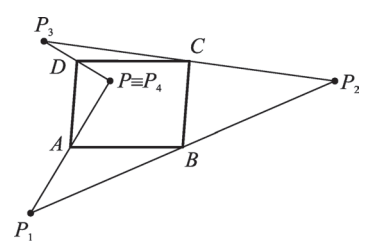
**2347.** Legyen az  $AC$  átló felezőpontja  $F_1$ , a  $BD$  átló felezőpontja  $F_2$ .  $\vec{AF}_1 = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$  és  $\vec{AF}_2 = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} \Rightarrow \vec{F_1F_2} = \vec{AF}_2 - \vec{AF}_1 = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} - \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2}$ .

**2348.**  $C$  felezi a  $PP'$  szakaszt:  $\mathbf{c} = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{p}'}{2} \Rightarrow \mathbf{p}' = \underline{\underline{2\mathbf{c} - \mathbf{p}}}$ .

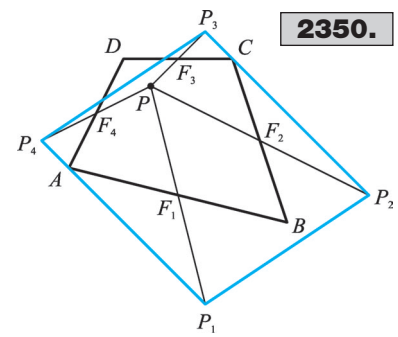
**2349.** A 2348. feladatban láttuk, hogy  $\mathbf{p}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{p}$ ;  $\mathbf{p}_2 = 2\mathbf{b} - \mathbf{p}_1 = 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + \mathbf{p}$ ;  $\mathbf{p}_3 = 2\mathbf{c} - \mathbf{p}_2 = 2\mathbf{c} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{a} - \mathbf{p}$ ;  $\mathbf{p}_4 = 2\mathbf{d} - \mathbf{p}_3 = 2\mathbf{d} - 2\mathbf{c} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + \mathbf{p}$ ;  $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$ , mivel  $ABCD$  paralelogramma  $\Rightarrow 2\mathbf{d} - 2\mathbf{c} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} = 2(\mathbf{d} - \mathbf{c} + \mathbf{b} - \mathbf{a}) = 2(\mathbf{d} - \mathbf{c} + \mathbf{c} - \mathbf{d}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}$ .

**2350.**  $\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ ;  $\mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$ ;  $\mathbf{f}_3 = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2}$ ;  $\mathbf{f}_4 = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{a}}{2}$ . A 2348. feladatban láttuk, hogy:  $\mathbf{p}_1 = 2\mathbf{f}_1 - \mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{p}$  és  $\mathbf{p}_2 = 2\mathbf{f}_2 - \mathbf{p} = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{p}$  és  $\mathbf{p}_3 = 2\mathbf{f}_3 - \mathbf{p} = \mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{p}$  és  $\mathbf{p}_4 = 2\mathbf{f}_4 - \mathbf{p} = \mathbf{d} + \mathbf{a} - \mathbf{p} \Rightarrow \vec{P_1P_2} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{p} - \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{p} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$  és  $\vec{P_4P_3} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4 = \mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{p} - \mathbf{d} - \mathbf{a} + \mathbf{p} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ , tehát  $\vec{P_1P_2} = \vec{P_4P_3} \Rightarrow P_1P_2P_3P_4$  paralelogramma.

**2349.**



**2350.**



**2351.** Legyenek a tükörképpontokba mutató vektorok rendre  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_6$ . A 2348. feladatban láttuk, hogy  $\mathbf{p}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{p}$ ;  $\mathbf{p}_2 = 2\mathbf{b} - \mathbf{p}_1 = 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + \mathbf{p}$ ;  $\mathbf{p}_3 = 2\mathbf{c} - \mathbf{p}_2 = 2\mathbf{c} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{a} - \mathbf{p}$ ;  $\mathbf{p}_4 = 2\mathbf{a} - \mathbf{p}_3 = 2\mathbf{a} - 2\mathbf{c} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + \mathbf{p} = -2\mathbf{c} + 2\mathbf{b} + \mathbf{p}$ ;  $\mathbf{p}_5 = 2\mathbf{b} - \mathbf{p}_4 = 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c} - 2\mathbf{b} - \mathbf{p} = 2\mathbf{c} - \mathbf{p}$ ;  $\mathbf{p}_6 = 2\mathbf{c} - \mathbf{p}_5 = 2\mathbf{c} - 2\mathbf{c} + \mathbf{p} = \mathbf{p}$ . Tehát  $\mathbf{p}_6 = \mathbf{p}$ .

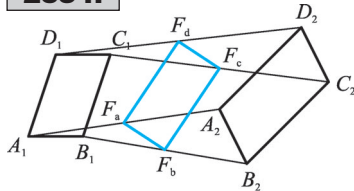
**2352.** Legyenek az  $A, B, C, D, E$  és  $F$  pontokba mutató helyvektorok  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}$  és  $\vec{F}$ .  
 $\vec{E} = \frac{\vec{A} + \vec{D}}{2}$ ;  $\vec{F} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2}$ ;  $\mathbf{b} = \vec{B} - \vec{A}$ ;  $\mathbf{a} = \vec{C} - \vec{D}$ ;  $\mathbf{k} = \vec{F} - \vec{E} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2} - \frac{\vec{A} + \vec{D}}{2} =$   
 $= \frac{\vec{B} - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{C} - \vec{D}}{2} = \frac{\mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{a}}{2}$ .

**2353.** Legyenek a csúcspokba és az átlófelező pontokba mutató helyvektorok  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}$  és  $\vec{F}$ .  $E$  felezi  $AC$ -t, ezért  $\vec{E} = \frac{\vec{A} + \vec{C}}{2}$  és  $F$  felezi  $BD$ -t, ezért  $\vec{F} = \frac{\vec{B} + \vec{D}}{2}$ .  $\vec{EF} = \vec{F} - \vec{E} = \frac{\vec{B} + \vec{D}}{2} - \frac{\vec{A} + \vec{C}}{2} = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{D} - \vec{C}}{2} = \frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{CD}}{2}$ .  $AB \parallel CD \Rightarrow \vec{AB}$  és  $\vec{CD}$  egyállású vektorok  $\Rightarrow EF$  párhuzamos az alapokkal.

**2354.** Legyenek az  $A_1, B_1, C_1, D_1$ , illetve  $A_2, B_2, C_2, D_2$  pontokba mutató helyvektorok  $\vec{A}_1, \vec{B}_1, \vec{C}_1, \vec{D}_1$ , illetve  $\vec{A}_2, \vec{B}_2, \vec{C}_2, \vec{D}_2$ .  $\vec{F}_a = \frac{\vec{A}_1 + \vec{A}_2}{2}$  és  $\vec{F}_b = \frac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2}{2}$  és  $\vec{F}_c = \frac{\vec{C}_1 + \vec{C}_2}{2}$  és  $\vec{F}_d = \frac{\vec{D}_1 + \vec{D}_2}{2}$ .  $\vec{F}_b \vec{F}_c = \vec{F}_c - \vec{F}_b = \frac{\vec{C}_1 + \vec{C}_2}{2} - \frac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2}{2} = \frac{\vec{C}_1 - \vec{B}_1}{2} + \frac{\vec{C}_2 - \vec{B}_2}{2}$ .  $\vec{F}_a \vec{F}_d = \vec{F}_d - \vec{F}_a = \frac{\vec{D}_1 + \vec{D}_2}{2} - \frac{\vec{A}_1 + \vec{A}_2}{2} = \frac{\vec{D}_1 - \vec{A}_1}{2} + \frac{\vec{D}_2 - \vec{A}_2}{2}$ . Mivel  $A_1B_1C_1D_1$ , illetve  $A_2B_2C_2D_2$  paralelogramma, ezért  $\vec{C}_1 - \vec{B}_1 = \vec{D}_1 - \vec{A}_1$  és  $\vec{C}_2 - \vec{B}_2 = \vec{D}_2 - \vec{A}_2 \Rightarrow \vec{F}_b \vec{F}_c = \vec{F}_a \vec{F}_d \Rightarrow F_a F_b F_c F_d$  paralelogramma.

**2355.** Az  $ABC$ , a  $BCD$ , a  $CDA$  és az  $ABD$  háromszögeknek közös a körülírt köre. A 2307. feladatban láttuk, hogy ha a körülírt kör középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja, akkor a csúcspokba mutató helyvektorok összege a körülírt kör középpontjából a magasságpontba mutató vektor. Az  $ABC \triangle M_1$  magasságpontjába mutató vektor:  $\vec{OM}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ . A  $BCD \triangle M_2$  magasságpontjába mutató vektor:  $\vec{OM}_2 = \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$ . Az  $ABD \triangle M_3$  magasságpontjába mutató vektor:  $\vec{OM}_3 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}$ . Az  $ACD \triangle M_4$  magasságpontjába mutató vektor:  $\vec{OM}_4 = \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$ . Az  $M_1 M_2 M_4 M_3$  négyszög oldalvektorai:  $\vec{M}_1 M_2 = \vec{OM}_2 - \vec{OM}_1 = \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{d} - \mathbf{a} = \vec{AD}$ ;  $\vec{M}_2 M_4 = \vec{OM}_4 - \vec{OM}_2 = \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \vec{BA}$ ;  $\vec{M}_4 M_3 = \vec{OM}_3 - \vec{OM}_4 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{c} = \vec{CB}$ ;

**2354.**



$\vec{M}_1 M_3 = \vec{OM}_3 - \vec{OM}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{d} - \mathbf{c} = \vec{CD}$ . A magasságvonalakból alkotott négyszög oldalvektorai egyenlők a húrnégyszög oldalvektoraiival, ezért a két négyszög oldalai páronként párhuzamosak és egyenlők, tehát a két négyszög egybevágó.

**2356.** Legyen a húrnégyszög körülírt körének középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja. A 2342. feladatban láttuk, hogy  $\vec{OS} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})$ . Legyen  $O$ -nak  $S$ -re vonatkozó tükörképe  $M$ .  $\vec{OM} = 2 \cdot \vec{OS} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})$ . Legyen  $E$  az  $AD$  szakasz felezéspontja.  $\vec{OE} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{d}}{2}$ .  $\vec{EM} = \vec{OM} - \vec{OE} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{d}}{2} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$  és  $\vec{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$ . Mivel  $|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = r$ , így  $(\mathbf{b} + \mathbf{c})$  és  $(\mathbf{c} - \mathbf{b})$  vektorok merőlegesek egymásra.  $\Rightarrow \vec{EM} \perp \vec{BC} \Rightarrow M$  rajta van az  $E$  felezéspontból  $BC$ -re állított merőlegesesen. A többi esetre is hasonlóan lehet belátni.

**2357.** Legyen  $\vec{AB} = \mathbf{a}$ ;  $\vec{AD} = \mathbf{b}$  és  $\vec{AE} = \mathbf{c}$ .  $ABCD$  lap középpontjába mutató vektor:  $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ ;  $ABFE$  lap középpontjába mutató vektor:  $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2}$ ;  $ADHE$  lap középpontjába mutató vektor:  $\frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$ ;  $BCGF$  lap középpontjába mutató vektor:  $\frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} + \mathbf{a}$ ;  $DCGH$  lap középpontjába mutató vektor:  $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} + \mathbf{b}$ ;  $EFGH$  lap középpontjába mutató vektor:  $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + \mathbf{c}$ .

**2358.**  $\vec{KB} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$ ;  $\vec{KF} = \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{z}$ ;  $\vec{KC} = -\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$ ;  
 $\vec{KG} = -\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{z}$ ;  $\vec{KA} = \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}$ ;  $\vec{KE} = \mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z}$ ;  
 $\vec{KD} = -\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}$ ;  $\vec{KH} = -\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z}$ .

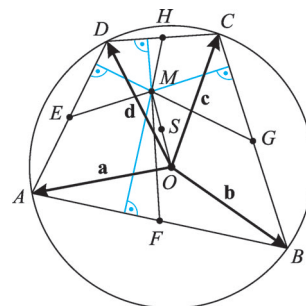
**2359.** Tekintsük a  $PQ$  testátlót.  $\vec{PX} + \vec{PY} + \vec{PZ} = \vec{PQ}$ . Másrésztől  $\frac{\vec{PX} + \vec{PY} + \vec{PZ}}{3} = \vec{PS}$  az  $XYZ\Delta$  súlypontjába mutató vektor, ami benne van az  $[XYZ]$  síkban.  $\Rightarrow A$  testátló  $P$ -hez közelebbi harmadolópontja benne van az  $[XYZ]$  síkban. Hasonlóan megmutatható, hogy a  $Q$ -hoz közelebbi harmadolópont benne van az  $[ABC]$  síkban.

**2360.**  $DS = 3SS_D$ ;  $\vec{OS}_D = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$  az  $ABC\Delta$  súlypontjának helyvektora.

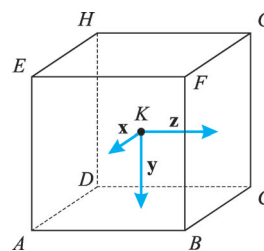
$$\vec{OS} = \frac{3\vec{OS}_D + \vec{OD}}{4} = \frac{3 \cdot \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} + \mathbf{d}}{4} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}.$$

Hasonlóan látható be a többi súlyvonalra is.

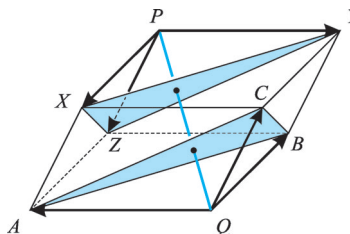
**2356.**



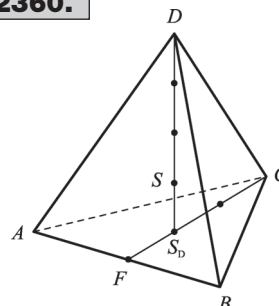
**2358.**



**2359.**



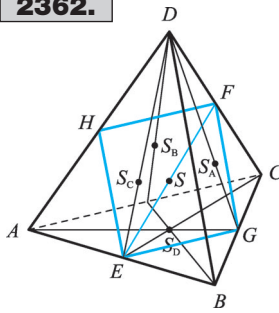
**2360.**





**2361.** Legyenek a csúcsokba mutató helyvektorok rendre  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  és  $\mathbf{d}$ . A 2360. feladatban láttuk, hogy  $\vec{OS} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}$ .  $\vec{SA} = \vec{OA} - \vec{OS} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4} = \frac{3\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d}}{4}$ . Hasonlóan:  $\vec{SB} = \frac{3\mathbf{b} - \mathbf{a} - \mathbf{c} - \mathbf{d}}{4}$ ;  $\vec{SC} = \frac{3\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{d}}{4}$ ;  $\vec{SD} = \frac{3\mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}}{4}$ .  
 $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = \frac{3\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d} + 3\mathbf{b} - \mathbf{a} - \mathbf{c} - \mathbf{d} + 3\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{d} + 3\mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}}{4} = \mathbf{0}$ .

**2362.**

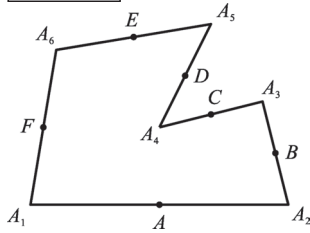


**2362.** Legyenek az  $A, B, C, D$  csúcsokba mutató helyvektorok rendre  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  és  $\mathbf{d}$ .  $\vec{OS} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}$  az  $ABCD$  tetraéder súlypontjának helyvektora.  $\vec{OS}_D = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$ ;  $\vec{OS}_A = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{3}$ ;  $\vec{OS}_B = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{3}$ ;  $\vec{OS}_C = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}}{3}$  a lapsúlypontokba mutató helyvektorok. Legyen  $Q$  az  $S_A S_B S_C S_D$  tetraéder súlypontja.  
 $\vec{OQ} = \frac{\vec{OS}_A + \vec{OS}_B + \vec{OS}_C + \vec{OS}_D}{4} = \frac{3\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + 3\mathbf{c} + 3\mathbf{d}}{12} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4} = \vec{OS} \Rightarrow Q \equiv S$ .

**2363.** Nézzük a 2362. ábrát! Legyenek a csúcsokba mutató helyvektorok rendre  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  és  $\mathbf{d}$ . A súlypontba mutató helyvektor:  $\vec{OS} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}$ .  $AB$  felezéspontja  $E$ :  $\vec{OE} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ ,  $CD$  felezéspontja  $F$ :  $\vec{OF} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2}$ ,  $EF$  felezéspontja  $P$ :  $\vec{OP} = \frac{\vec{OE} + \vec{OF}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4} = \vec{OS} \Rightarrow P \equiv S \Rightarrow A$  súlypont felezi  $EF$  szakaszt.

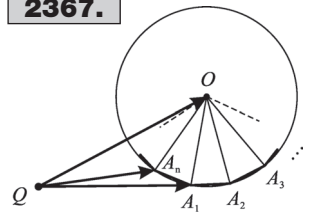
**2364.** Nézzük a 2362. ábrát! Felhasználjuk, hogy  $S$  felezi  $EF$ -et és  $HG$ -t (lásd 2363. feladat)  $\Rightarrow EGFH$  négyszög  $EF$  és  $GH$  átlójának közös felezéspontja  $S \Leftrightarrow EGFH$  síkbeli négyszög és paralelogramma.

**2365.**



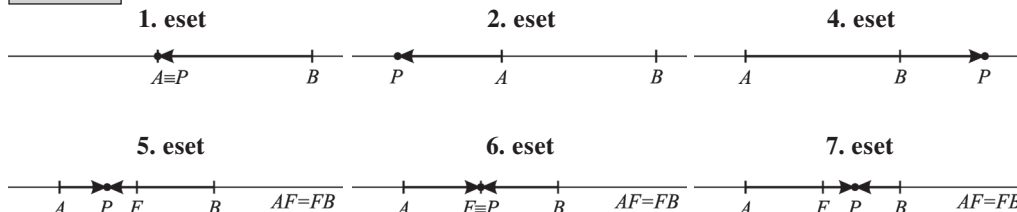
**2365.**  $\vec{A} = \frac{\vec{A}_1 + \vec{A}_2}{2}$  és  $\vec{B} = \frac{\vec{A}_2 + \vec{A}_3}{2} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \frac{\vec{A}_3 - \vec{A}_1}{2}$ .  
 Hasonlóan:  $\vec{CD} = \frac{\vec{A}_5 - \vec{A}_3}{2}$  és  $\vec{EF} = \frac{\vec{A}_1 - \vec{A}_5}{2} \Rightarrow \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} = \frac{1}{2} (\vec{A}_3 - \vec{A}_1 + \vec{A}_5 - \vec{A}_3 + \vec{A}_1 - \vec{A}_5) = \mathbf{0}$ .

**2367.**



**2366.**  $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = \vec{AB} + (\vec{AB} + \vec{BC}) + (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}) + (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE}) + (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF}) = 3\vec{AB} + 3\vec{BC} + 3\vec{CD} = 3\vec{AD}$  az  $\vec{AB} + \vec{DE} = \mathbf{0}$  és  $\vec{BC} + \vec{EF} = \mathbf{0}$  összefüggéseket felhasználva.  
**2367.**  $\vec{QO} = \vec{QA}_1 + \vec{A}_1\vec{O}$ ;  $\vec{QO} = \vec{QA}_2 + \vec{A}_2\vec{O}$ ;  $\vec{QO} = \vec{QA}_3 + \vec{A}_3\vec{O}$ ; ...  $\vec{QO} = \vec{QA}_n + \vec{A}_n\vec{O}$ .  $\Rightarrow n \cdot \vec{QO} = \vec{QA}_1 + \vec{QA}_2 + \dots + \vec{QA}_n + \vec{A}_1\vec{O} +$

**2369.**



$\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n$ . Mivel az  $A_1 A_2 \dots A_n$  sokszög szabályos,  $O$  a sokszög súlypontja is egyben.  $\Rightarrow \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n = \mathbf{0}$ .

Ezt a  $\otimes$  egyenletben felhasználva:  $\vec{QO} = \frac{1}{n} \cdot (\vec{QA}_1 + \vec{QA}_2 + \dots + \vec{QA}_n)$ .

**2368.**  $\vec{AA}_1 + \vec{BB}_1 + \vec{CC}_1 + \vec{DD}_1 = \vec{A}_1 - \vec{A} + \vec{B}_1 - \vec{B} + \vec{C}_1 - \vec{C} + \vec{D}_1 - \vec{D} = (C_1 - A) + (D_1 - B) + (A_1 - C) + (B_1 - D) = \vec{AC}_1 + \vec{BD}_1 + \vec{CA}_1 + \vec{DB}_1$ .

**2369. 1. eset:**  $\lambda = 0$ ;  $\vec{AP} = \mathbf{0} = 0 \cdot \vec{BP}$ .

**2. eset:**  $0 < \lambda < 1$ ;  $|\vec{AP}| < |\vec{BP}|$ .

**3. eset:**  $\lambda = 1$ ; Nincs olyan  $P$  pont, amelyre  $\vec{AP} = \vec{BP}$  lenne.

**4. eset:**  $1 < \lambda$ ;  $|\vec{AP}| > |\vec{BP}|$ .

**5. eset:**  $-1 < \lambda < 0$ ;  $|\vec{AP}| < |\vec{BP}|$ .

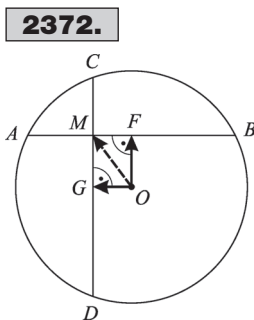
**6. eset:**  $\lambda = -1$ ;  $\vec{AP} = \vec{BP}$ .

**7. eset:**  $\lambda < -1$ ;  $|\vec{AP}| > |\vec{BP}|$ .

**2370.**  $\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{A} - \vec{P} + 2\vec{B} - 2\vec{P} + 3\vec{C} - 3\vec{P} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{A} + 2\vec{B} + 3\vec{C} = 6\vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \frac{\vec{A} + 2\vec{B} + 3\vec{C}}{6}$ . A  $P$  pontba mutató helyvektor a fenti összefüggéssel szerkeszthető.

**2371.**  $\vec{A}_1 B_1 + \vec{A}_2 B_2 + \dots + \vec{A}_n B_n = \vec{B}_1 - \vec{A}_1 + \vec{B}_2 - \vec{A}_2 + \dots + \vec{B}_n - \vec{A}_n = (\vec{B}_1 - \vec{A}_1) + (\vec{B}_2 - \vec{A}_2) + \dots + (\vec{B}_n - \vec{A}_n) = \vec{A}_1 B_1 + \vec{A}_2 B_2 + \dots + \vec{A}_n B_n$ . Felhasználtuk, hogy a vektorösszeadás kommutatív művelet.

**2372.**  $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OF}$ , ahol  $F$  felezi  $AB$ -t;  $\vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{OG}$ , ahol  $G$  felezi  $CD$ -t.  $OF \perp AB$ ,  $OG \perp CD$  és  $AB \perp CD$  miatt  $OGMF$  téglalap.  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{OF} + 2\vec{OG} = \underline{\underline{2\vec{OM}}}$ .



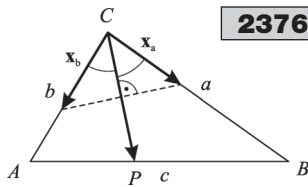
**2372.**



### Vektorok felbontása összetevőkre

**2373.** A súlyvonalvektor az oldalvektorok felének összege.

**2374. 2375.** A feladatok megoldását az olvasóra bizzuk.



**2376.**

**2376.** A kért felbontást a 2376. ábra mutatja. A szögfelező tételből tudjuk, hogy  $\frac{AP}{PB} = \frac{b}{a} \Rightarrow AP = \frac{bc}{a+b}$   $BP = \frac{ac}{a+b}$ .

A párhuzamos szelők tétele miatt  $\frac{|x_b|}{b} = \frac{PB}{c}$ ;  $\frac{|x_a|}{a} = \frac{AP}{c}$ .

$$|x_b| = b \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{ac}{a+b} = \frac{ab}{a+b} \quad \text{és} \quad x_b = |x_b| \cdot e_b = |x_b| \cdot \frac{b}{b} =$$

$$= \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a}{a+b} \cdot b. \text{ Hasonlóan belátható, hogy } x_a = \frac{b}{a+b} \cdot a.$$

$$\vec{CP} = x_b + x_a = \frac{a}{a+b} \cdot b + \frac{b}{a+b} \cdot a.$$

**2377.** a) Az egyértelmű előállíthatóság miatt  $\underline{\alpha = 3}$  és  $2\beta + 1 = 5 \Rightarrow \underline{\beta = 2}$ . b)  $\alpha + \beta - 1 = 0$

és  $2\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \underline{\alpha = \frac{1}{3}} \Rightarrow \underline{\beta = \frac{2}{3}}$ . c)  $\alpha = \beta + 1$  és  $\beta = -(\alpha - 1) \Rightarrow \underline{\alpha = 1} \Rightarrow \underline{\beta = 0}$ .

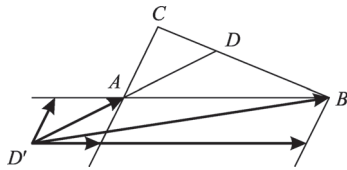
d)  $2\alpha - \beta - 1 = 0$  és  $3\alpha + \beta + 10 = 0 \Rightarrow \underline{\alpha = -\frac{9}{5}} \Rightarrow \underline{\beta = -\frac{23}{5}}$ .

**2378.**  $\vec{AD} + \vec{AD}' = \mathbf{0} \Rightarrow D$  középpontos tükörképe  $A$ -ra  $D'$ .

$$\vec{D'A} = \vec{AD} = \frac{\vec{AC} + \vec{AB}}{2}; \quad \vec{D'B} = \vec{D'A} + \vec{AB} = \frac{\vec{AC} + \vec{AB}}{2} + \vec{AB} = \frac{\vec{AC} + 3\vec{AB}}{2}.$$

**2379.**  $m = -\frac{1}{2}b + a$ .

**2378.**



**2380.**  $\vec{AB} = b - a$ .  $A, B$  és  $C$  egy egyenesen vannak, ezért  $\vec{BC}$  és  $\vec{AB}$  ( $\neq \mathbf{0}$ ) egyállású vektorok.  $\Rightarrow$  Van olyan  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,

hogy  $\vec{BC} = \lambda \cdot \vec{AB} = \lambda \cdot (b - a)$ ;  $c = b + \vec{BC} = b + \lambda \cdot (b - a) = (\lambda + 1)b - \lambda a$ ;  $\beta = \lambda + 1$  és  $\alpha = -\lambda$  választással

$$c = \alpha \cdot a + \beta \cdot b \text{ és } \alpha + \beta = 1.$$

**2381.**  $c = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$  és  $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow c = (1 - \beta) \cdot a + \beta \cdot b; \quad \vec{AB} = b - a; \quad \vec{BC} = c - b =$$

$$= (1 - \beta) \cdot a + \beta \cdot b - b = (\beta - 1) \cdot b - (\beta - 1) \cdot a =$$

$$= (\beta - 1) \cdot (b - a) = (\beta - 1) \cdot \vec{AB}. \otimes \text{ Ha } a \text{ és } b \text{ nem egyál-}$$

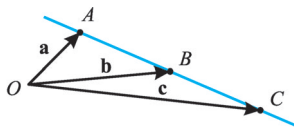
lású vektorok, akkor  $\vec{AB} \neq \mathbf{0}$ . Ha  $\beta = 1$ , akkor

$c = \beta \cdot b = b \Rightarrow C$  rajta van az  $AB$  egyenesen. Ha  $\beta \neq 1$ , akkor

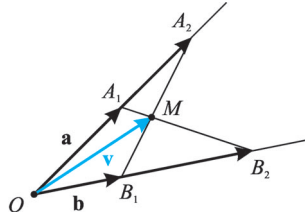
$\vec{BC} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \vec{AB}$  és  $\vec{BC}$  a  $\otimes$  összefüggés miatt egymásba fű-

zött egyállású vektorok, így  $A, B$  és  $C$  egy egyenesen vannak.

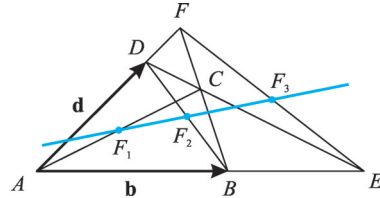
**2381.**



**2382.**



**2383.**



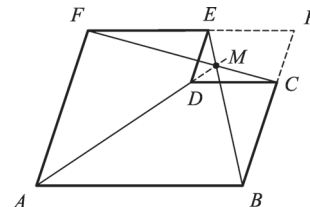
**2382.** Az  $M$  metszéspont akkor létezik, ha  $A_1B_2$  nem párhuzamos  $B_1A_2$ -vel, azaz  $\lambda\mu \neq 1$ . A 2380. feladatban láttuk, hogy  $A_2, M, B_1$  egy egyenesen lévő pontokba mutató vektorokra:  $\mathbf{v} = \alpha \cdot \lambda \mathbf{a} + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{b}$ . Hasonlóan az  $A_1, M, B_2$  pontokba mutató vektorokra:  $\mathbf{v} = \beta \cdot \mathbf{a} + (1 - \beta) \cdot \mu \mathbf{b} \Rightarrow \alpha \cdot \lambda \mathbf{a} + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{v} = \beta \cdot \mathbf{a} + (1 - \beta) \cdot \mu \mathbf{b}$ . Az előállítás egyértelműsége miatt:  $\alpha \cdot \lambda = \beta$  és  $1 - \alpha = (1 - \beta) \cdot \mu \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{\lambda} \Rightarrow 1 - \frac{\beta}{\lambda} = (1 - \beta) \cdot \mu \Rightarrow \beta = \frac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1}$   

$$\mathbf{v} = \frac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{a} + \left(1 - \frac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1}\right) \cdot \mu \mathbf{b} = \frac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{a} + \frac{\mu(\lambda - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{b}.$$

**2383.** Legyen  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ ;  $\overrightarrow{AE} = \lambda \mathbf{b}$ ;  $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$ ;  $\overrightarrow{AF} = \mu \mathbf{d}$ . A 2382. feladat eredményét felhasználva  $\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{b} + \frac{\mu(\lambda - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{d}$ ;  $\overrightarrow{AF_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{\lambda(\mu - 1)}{2(\mu\lambda - 1)} \cdot \mathbf{b} + \frac{\mu(\lambda - 1)}{2(\mu\lambda - 1)} \cdot \mathbf{d}$ ;  $\overrightarrow{AF_2} = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{b}}{2}$ ;  $\overrightarrow{AF_3} = \frac{\lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{d}}{2}$ ;  $\overrightarrow{AF_1} = \frac{\lambda \mu \mathbf{b} - \lambda \mathbf{b} + \lambda \mu \mathbf{d} - \mu \mathbf{d}}{2(\mu\lambda - 1)} = \frac{\lambda \mu (\mathbf{b} + \mathbf{d})}{2(\mu\lambda - 1)} - \frac{\lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{d}}{2(\mu\lambda - 1)} = \frac{\lambda \mu}{(\mu\lambda - 1)} \cdot \overrightarrow{AF_2} + \frac{1}{1 - \mu\lambda} \cdot \overrightarrow{AF_3}$ ;  $\overrightarrow{AF_1} = k \cdot \overrightarrow{AF_2} + m \cdot \overrightarrow{AF_3}$ , ahol  $k = \frac{\lambda \mu}{(\mu\lambda - 1)}$  és  $m = \frac{1}{1 - \mu\lambda}$ .  $k + m = \frac{\mu\lambda}{(\mu\lambda - 1)} + \frac{1}{1 - \mu\lambda} = \frac{\mu\lambda - 1}{\mu\lambda - 1} = 1$  miatt a 2381. feladat alapján ez éppen azt jelenti, hogy  $F_1, F_2$  és  $F_3$  egy egyenesen vannak.

**2384.** Legyen  $\overrightarrow{PE} = \mathbf{e}$   $\overrightarrow{PF} = \lambda \mathbf{e}$   $\overrightarrow{PC} = \mathbf{c}$   $\overrightarrow{PB} = \mu \mathbf{c}$  és  $EB \cap FC = M$ . A 2382. feladatban láttuk, hogy  $\overrightarrow{PM} = \frac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{e} + \frac{\mu(\lambda - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{c}$ ;  $AB \parallel PF$ ;  $EA \parallel PB$ ;  $DC \parallel PE$  és  $ED \parallel PC$  miatt  $\overrightarrow{PA} = \lambda \cdot \mathbf{e} + \mu \cdot \mathbf{c}$  és  $\overrightarrow{PD} = \mathbf{e} + \mathbf{c}$ .  $\overrightarrow{PM} = \frac{\lambda \mu \cdot \mathbf{e} - \lambda \cdot \mathbf{e} + \lambda \mu \cdot \mathbf{c} - \mu \cdot \mathbf{c}}{\lambda \mu - 1} = \frac{\lambda \mu}{\lambda \mu - 1} \cdot (\mathbf{e} + \mathbf{c}) - \frac{\lambda \cdot \mathbf{e} + \mu \cdot \mathbf{c}}{\lambda \mu - 1} = \frac{\lambda \mu}{\lambda \mu - 1} \cdot \overrightarrow{PD} - \frac{1}{\lambda \mu - 1} \cdot \overrightarrow{PA}$ .  $\frac{\lambda \mu}{\lambda \mu - 1} - \frac{1}{\lambda \mu - 1} = 1$  és a 2381. feladat felhasználásával ez azt jelenti, hogy  $M$  rajta van az  $AD$  egyenesen.  $\Rightarrow AD, BE$  és  $CF$  egy pontban metszik egymást.

**2384.**

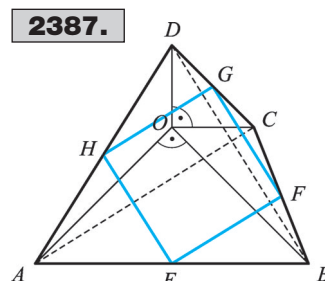
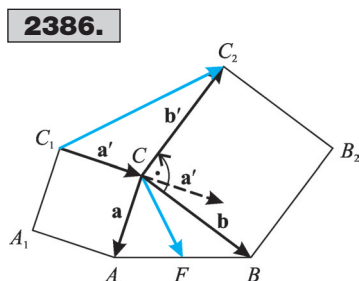


**2385.** Az osztópontba mutató helyvektorokra vonatkozó összefüggés miatt  $\vec{V} = \frac{\vec{A} + \vec{D}}{2}$ ;  
 $\vec{Z} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2}$ ;  $\vec{X} = \frac{\mu\vec{A} + \lambda\vec{B}}{\lambda + \mu}$ ;  $\vec{Y} = \frac{\mu\vec{D} + \lambda\vec{C}}{\lambda + \mu}$ .  $P$  az  $XY$  egyenes pontja, ezért a 2380. feladat  
 állítása szerint van olyan  $k \in \mathbf{R}$ , hogy  $\vec{P} = k \cdot \vec{X} + (1 - k) \cdot \vec{Y}$ .  $P$  a  $VZ$  egyenes pontja, ezért van  
 olyan  $m \in \mathbf{R}$ , hogy  $\vec{P} = m \cdot \vec{V} + (1 - m) \cdot \vec{Z}$ . A kettőt összevetve  $k \cdot \vec{X} + (1 - k) \cdot \vec{Y} = m \cdot \vec{V} +$   
 $+ (1 - m) \cdot \vec{Z}$ , azaz  $k \cdot \frac{\mu\vec{A} + \lambda\vec{B}}{\lambda + \mu} + (1 - k) \cdot \frac{\mu\vec{D} + \lambda\vec{C}}{\lambda + \mu} = m \cdot \frac{\vec{A} + \vec{D}}{2} + (1 - m) \cdot \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2}$ .  
 $\vec{A}(2k\mu - m(\mu + \lambda)) + \vec{B}(2k\lambda - (1 - m)(\mu + \lambda)) + \vec{C}(2\lambda(1 - k) - (1 - m)(\mu + \lambda)) +$   
 $+ \vec{D}(2\mu(1 - k) - m(\mu + \lambda)) = \mathbf{0} \Rightarrow 2k\mu = m(\mu + \lambda); \quad 2k\lambda = (1 - m)(\mu + \lambda); \quad 2\lambda(1 - k) =$   
 $= (1 - m)(\mu + \lambda); \quad 2\mu(1 - k) = m(\mu + \lambda) \Rightarrow \frac{\mu}{\lambda} = \frac{m}{1 - m} \Rightarrow m = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \Rightarrow 2k\mu =$   
 $= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot (\mu + \lambda) \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{k}{1 - k} = 1$ . A  $P$  pont felezi az  $XY$  szakaszt és  $\lambda : \mu$  arányban  
 osztja a  $VZ$  szakaszt.

## Vektorok elforgatásával megoldható feladatok

**2386.** Legyen  $\vec{CA} = \mathbf{a}$  és  $\vec{CB} = \mathbf{b}$ .  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\vec{CF}$ , mert  $CF$  súlyvonal. Legyen  $\mathbf{a} + 90^\circ$ -os elfor-  
 gatottja  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b} + 90^\circ$ -os elforgatottja  $\mathbf{b}'$ .  $\vec{C_1C} = \mathbf{a}'$ ;  $\vec{CC_2} = \mathbf{b}' \Rightarrow \vec{C_1C_2} = \vec{C_1C} + \vec{CC_2} = \mathbf{a}' + \mathbf{b}' =$   
 $= (\mathbf{a} + \mathbf{b})' = (2\vec{CF})' \Rightarrow \vec{C_1C_2} = 2\vec{CF}$  és a  $90^\circ$ -os elforgatás miatt egymásra merőlegesek.

**2387.**  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ;  $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ;  $\vec{OC} = \mathbf{c}$ ;  $\vec{OD} = \mathbf{d}$ ;  $\vec{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ ;  $\vec{BD} = \mathbf{d} - \mathbf{b}$ . a) Tekintsük  
 az  $O$  középpontú  $+90^\circ$ -os elforgatást.  $\mathbf{a}$  képe  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  képe  $\mathbf{d}$ ,  $(\mathbf{c} - \mathbf{a})$  képe  $(\mathbf{d} - \mathbf{b})$ ,  $\vec{AC}$  képe  
 $\vec{BD} \Rightarrow BD \perp AC$  és  $BD = AC$ . b)  $\vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{AC}$  és  $\vec{EH} = \frac{1}{2}\vec{BD}$ . A feladat a) része miatt  
 $EF \perp EH$  és  $EF = EH$ . Ez az  $EFGH$  négyszög bármely két szomszédos oldalára megmutatható,  
 ezért  $EFGH$  négyzet.



**2388.** a) A megoldást lásd a 2386. feladat megoldásánál.

b) Az a) pontban láttuk, hogy  $KE \perp AA_1$ , ahol  $AA_1$  az egyik súlyvonal.  $\Rightarrow$  A-ból  $KE$ -re bocsátott merőleges az  $AA_1$  egyenes. Hasonlóan B-ből  $FG$ -re bocsátott merőleges a  $BB_1$  egyenes, C-ből  $JH$ -ra bocsátott merőleges a  $CC_1$  egyenes. A háromszög súlyvonalai a súlypontban metszik egymást, ezért a feltételeknek eleget tevő merőlegesek is a súlypontban metszik egymást. c) Legyen  $\vec{AC} = \mathbf{c}$  és  $\vec{AB} = \mathbf{b} \Rightarrow \vec{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$ . Tekintsük a  $+90^\circ$ -os elforgatást.  $\mathbf{b}$  képe  $\mathbf{b}'$  és  $\mathbf{c}$  képe  $\mathbf{c}'$ , ezért  $\vec{EA} = \mathbf{b}'$  és  $\vec{AK} = \mathbf{c}'$ .  $\vec{AR} = \mathbf{c}' - \mathbf{b}' = (\mathbf{c} - \mathbf{b})' = (\vec{BC})' \Rightarrow \vec{AR}$  a  $\vec{BC}$  a  $+90^\circ$ -os elforgatottja, ezért  $AR \perp BC$  és  $AR = BC$ . Hasonlóan megmutatható, hogy  $BP \perp AC$  és  $BP = AC$ , valamint  $CQ \perp AB$  és  $CQ = AB$ . d) A korábbi jelöléseket használva (a helyvektorok közös kezdőpontja A):  $\vec{Z} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{c}'}{2}$ ;  $\vec{X} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{2}$ ;  $\vec{A}_1 = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} \Rightarrow \vec{A}_1\vec{Z} = \vec{Z} - \vec{A}_1 = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{c}' - \mathbf{b} - \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{2}$  és  $\vec{A}_1\vec{X} = \vec{X} - \vec{A}_1 = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}' - \mathbf{b} - \mathbf{c}}{2} = \frac{-\mathbf{c} - \mathbf{b}'}{2}$ . Vegyük az  $\vec{A}_1\vec{Z}$   $+90^\circ$ -os elforgatottját.

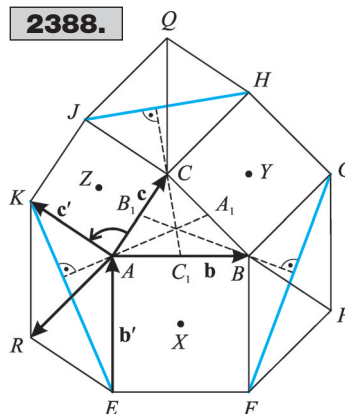
$(\vec{A}_1\vec{Z})' = \left(\frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{2}\right)' = \frac{\mathbf{c}'' - \mathbf{b}'}{2} = \frac{-\mathbf{c} - \mathbf{b}'}{2} = \vec{A}_1\vec{X} \Rightarrow X$  a  $Z$  pont  $A_1$  körüli  $+90^\circ$ -os elforgatottja.

$\Rightarrow$  Az  $A_1$  oldalfelezéspont az  $XYZ\Delta$   $XZ$  oldala fölé befelé rajzolt négyzet középpontja. Hasonlóan megmutatható, hogy  $B_1$  az  $XY$  oldal fölé,  $C_1$  az  $YZ$  oldal fölé rajzolt négyzet középpontja.

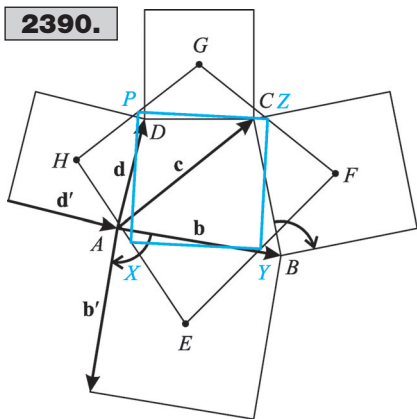
e) A korábbi jelöléseket használva:  $\vec{P} = \vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GP} = \mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{c})' - \mathbf{b}' = \mathbf{b} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}' - \mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{c}'$ ;  $\vec{R} = \mathbf{c}' - \mathbf{b}'$ ;  $\vec{X} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{2}$ .  $\frac{\vec{P} + \vec{R}}{2} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{c}' + \mathbf{c}' - \mathbf{b}'}{2} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{2} = \vec{X} \Rightarrow X$  a  $PR$  szakasz felezőpontja. Hasonlóan megmutatható, hogy  $Y$  a  $PQ$  szakasz,  $Z$  pedig a  $QR$  szakasz felezőpontja. f) Az e) pontban láttuk, hogy  $X$  felezi a  $PR$  szakaszt, ezért  $QX$  a  $PQR\Delta$   $Q$ -ből induló súlyvonala. Hasonlóan belátható, hogy  $PZ$  és  $RY$  is súlyvonalak, tehát a  $PQR\Delta$  súlypontjában metszik egymást. g) A korábbi jelöléseket használva:  $\vec{S}_{ABC} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$ ;  $\vec{X} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{2}$ ;

$\vec{Y} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}'}{2}$ ;  $\vec{Z} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{c}'}{2}$ ;  $\vec{S}_{XYZ} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}' + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}' + \mathbf{c} + \mathbf{c}'}{6} = \frac{2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}}{6} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$ ;  
 $\vec{E} = -\mathbf{b}'$ ;  $\vec{G} = \mathbf{b} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}'$ ;  $\vec{J} = \mathbf{c} + \mathbf{c}'$ ;  $\vec{S}_{EGJ} = \frac{-\mathbf{b}' + \mathbf{b} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}' + \mathbf{c} + \mathbf{c}'}{3} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$ ;  
 $\vec{F} = \mathbf{b} - \mathbf{b}'$ ;  $\vec{H} = \mathbf{c} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}'$ ;  $\vec{K} = \mathbf{c}'$ ;  $\vec{S}_{FHK} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}' + \mathbf{c} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}' + \mathbf{c}'}{3} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$ . A fentiek

alapján  $S_{ABC} \equiv S_{XYZ} \equiv S_{EGJ} \equiv S_{FHK}$ . h)  $ABHJ$  négyszögben a  $C$  pont olyan, hogy  $AJC$  és  $BHC$  egyenlő szárú derékszögű háromszögek. A 2387. feladatban beláttuk, hogy ilyen négyszög esetében az átlók merőlegesek és egyenlők:  $AH = BJ$  és  $AH \perp BJ$ . Hasonlóan megmutatható a másik két szakaszpár egyenlősége és merőlegessége is.



2390.



$$= \left( \frac{\vec{D} - \vec{B}}{2} \right)' = \frac{\vec{D}' - \vec{B}'}{2} = \frac{\vec{C} - \vec{A}}{2} = \vec{EF} \Rightarrow F \text{ a } H \text{ pont } E \text{ körüli } (-90)^\circ\text{-os elforgatottja. Hason-}$$

lóan  $H$  az  $F$  pont  $G$  körüli  $(-90)^\circ$ -os elforgatottja, ezért  $HEFG$  négyzet.

**2390.** Legyen  $A$  a helyvektorok közös kezdőpontja. Jelöljük a  $(-90)^\circ$ -os elforgatás során keletkezett képeket ' -vel.  $\vec{AB} = \mathbf{b}$ ;  $\vec{AC} = \mathbf{c}$ ;  $\vec{AD} = \mathbf{d}$ ;  $\vec{AE} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2}$ ;  $\vec{AF} = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{c}' - \mathbf{b}'}{2} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{c}' - \mathbf{b}'}{2}$ ;  $\vec{AG} = \mathbf{c} + \frac{\mathbf{d} - \mathbf{c} + \mathbf{d}' - \mathbf{c}'}{2} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{d}' - \mathbf{c}'}{2}$ ;  $\vec{AH} = \frac{\mathbf{d} - \mathbf{d}'}{2}$ ;

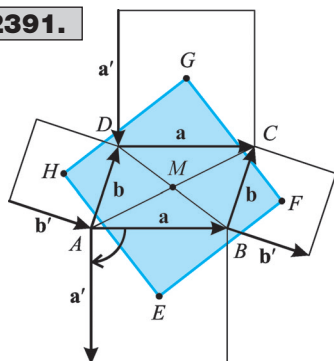
$$\vec{GE} = \vec{AE} - \vec{AG} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}' - (\mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{d}' - \mathbf{c}')}{2} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d} + \mathbf{b}' + \mathbf{c}' - \mathbf{d}'}{2};$$

$$\vec{FH} = \vec{AH} - \vec{AF} = \frac{\mathbf{d} - \mathbf{d}' - (\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{c}' - \mathbf{b}')}{2} = \frac{\mathbf{b}' - \mathbf{c}' - \mathbf{d}' - \mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{d}}{2};$$

$$\left( \vec{GE} \right)' = \left( \frac{\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d} + \mathbf{b}' + \mathbf{c}' - \mathbf{d}'}{2} \right)' = \frac{\mathbf{b}' - \mathbf{c}' - \mathbf{d}' + \mathbf{b}'' + \mathbf{c}'' - \mathbf{d}''}{2}. \text{ Felhasználva, hogy } \mathbf{b}'' = -\mathbf{b},$$

$$\mathbf{c}'' = -\mathbf{c} \text{ és } \mathbf{d}'' = -\mathbf{d}: \left( \vec{GE} \right)' = \frac{\mathbf{b}' - \mathbf{c}' - \mathbf{d}' - \mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{d}}{2} = \vec{FH} \Rightarrow \text{A } HEFG \text{ négyszög átlói}$$

2391.



**2389.** A 2387. ábra jelöléseivel: Legyenek az  $A, B, C$  és  $D$  pontokba mutató helyvektorok  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  és  $\vec{D}$ .  $\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A}$  és  $\vec{BD} = \vec{D} - \vec{B}$ ,  $AC \perp BD$  és  $AC = BD$  miatt  $\vec{AC}$  a  $\vec{BD}$   $(-90)^\circ$ -os elforgatottja:  $\vec{AC} = (\vec{BD})' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{C} - \vec{A} = \vec{D}' - \vec{B}'; \quad \vec{E} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}; \quad \vec{F} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2};$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{A} + \vec{D}}{2}. \quad \vec{EF} = \vec{F} - \vec{E} = \frac{\vec{B} + \vec{C} - \vec{A} - \vec{B}}{2} =$$

$$= \frac{\vec{C} - \vec{A}}{2}; \quad \vec{EH} = \vec{H} - \vec{E} = \frac{\vec{A} + \vec{D} - \vec{A} - \vec{B}}{2} = \frac{\vec{D} - \vec{B}}{2}.$$

Tekintsük az  $\vec{EH}$   $(-90)^\circ$ -os elforgatottját.  $(\vec{EH})' =$

$$\left( \frac{\vec{D} - \vec{B}}{2} \right)' = \frac{\vec{D}' - \vec{B}'}{2} = \frac{\vec{C} - \vec{A}}{2} = \vec{EF} \Rightarrow F \text{ a } H \text{ pont } E \text{ körüli } (-90)^\circ\text{-os elforgatottja. Hason-}$$

lóan  $H$  az  $F$  pont  $G$  körüli  $(-90)^\circ$ -os elforgatottja, ezért  $HEFG$  négyzet.

**2390.** Legyen  $A$  a helyvektorok közös kezdőpontja. Jelöljük a  $(-90)^\circ$ -os elforgatás során keletkezett képeket ' -vel.  $\vec{AB} = \mathbf{b}$ ;  $\vec{AC} = \mathbf{c}$ ;  $\vec{AD} = \mathbf{d}$ ;  $\vec{AE} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2}$ ;  $\vec{AF} = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{c}' - \mathbf{b}'}{2} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{c}' - \mathbf{b}'}{2}$ ;  $\vec{AG} = \mathbf{c} + \frac{\mathbf{d} - \mathbf{c} + \mathbf{d}' - \mathbf{c}'}{2} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{d}' - \mathbf{c}'}{2}$ ;  $\vec{AH} = \frac{\mathbf{d} - \mathbf{d}'}{2}$ ;

$$\vec{GE} = \vec{AE} - \vec{AG} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}' - (\mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{d}' - \mathbf{c}')}{2} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d} + \mathbf{b}' + \mathbf{c}' - \mathbf{d}'}{2};$$

$$\vec{FH} = \vec{AH} - \vec{AF} = \frac{\mathbf{d} - \mathbf{d}' - (\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{c}' - \mathbf{b}')}{2} = \frac{\mathbf{b}' - \mathbf{c}' - \mathbf{d}' - \mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{d}}{2};$$

$$\left( \vec{GE} \right)' = \left( \frac{\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d} + \mathbf{b}' + \mathbf{c}' - \mathbf{d}'}{2} \right)' = \frac{\mathbf{b}' - \mathbf{c}' - \mathbf{d}' + \mathbf{b}'' + \mathbf{c}'' - \mathbf{d}''}{2}. \text{ Felhasználva, hogy } \mathbf{b}'' = -\mathbf{b},$$

$$\mathbf{c}'' = -\mathbf{c} \text{ és } \mathbf{d}'' = -\mathbf{d}: \left( \vec{GE} \right)' = \frac{\mathbf{b}' - \mathbf{c}' - \mathbf{d}' - \mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{d}}{2} = \vec{FH} \Rightarrow \text{A } HEFG \text{ négyszög átlói}$$

merőlegesek és egyenlők. A 2389. feladatot alkalmazva a négyszög oldalfelezéspontjai négyzetet alkotnak.

**2391. 1. megoldás:** Legyen  $A$  a helyvektorok közös kezdőpontja. Jelöljük a  $(-90)^\circ$ -os elforgatás során keletkezett képeket ' -vel. Legyen  $\vec{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{AD} = \mathbf{b}$ .  $ABCD$  paralelogramma, ezért  $\vec{DC} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{BC} = \mathbf{b}$ .  $\vec{AE} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}'}{2}$ ;  $\vec{AF} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2}$ ;  $\vec{AG} = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{a} - \mathbf{a}'}{2}$ ;  $\vec{AH} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{2}$ .  $\vec{HG} = \vec{AG} - \vec{AH} = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{a} - \mathbf{a}'}{2} -$

$$-\frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'}{2} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}; \quad \vec{HE} = \vec{AE} - \vec{AH} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}'}{2} - \frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'}{2} = \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}; \quad \vec{GF} =$$

$$= \vec{AF} - \vec{AG} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}+\mathbf{b}'}{2} - \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}-\mathbf{a}'}{2} = \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}. \text{ Tehát } \vec{HE} = \vec{GF}, \text{ ezért } HE = GF \text{ és}$$

$$HE \parallel GF \text{ (1). } (\vec{HG})' = \left( \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2} \right)' = \frac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'-\mathbf{a}''+\mathbf{b}''}{2}. \text{ Felhasználva } \mathbf{a}'' = -\mathbf{a} \text{ és } \mathbf{b}'' = -\mathbf{b}:$$

$$(\vec{HG})' = \frac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'+\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2} = \vec{HE} \Rightarrow HG = HE \text{ és } HG \perp GE \text{ (2). (1) és (2) összefüggésekből követ-$$

kezik, hogy  $HEFG$  négyzet. **2. megoldás:** Legyen  $M$  a paralelogramma átlóinak metszéspontja.

$$\vec{AE} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}'}{2}; \quad \vec{MA} = -\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}; \quad \vec{ME} = \vec{MA} + \vec{AE} = -\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}'}{2} = \frac{\mathbf{a}'-\mathbf{b}}{2}; \quad \vec{MH} =$$

$$= \vec{MA} + \vec{AH} = -\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'}{2} = -\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}'}{2}. \text{ Vegyük az } \vec{ME} \text{ vektor } (-90^\circ)\text{-os elforgatottját.}$$

$$(\vec{ME})' = \left( \frac{\mathbf{a}'-\mathbf{b}}{2} \right)' = \frac{\mathbf{a}''-\mathbf{b}'}{2} = \frac{-\mathbf{a}-\mathbf{b}'}{2} = -\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}'}{2} = \vec{MH}. \text{ Hasonlóan belátható, hogy}$$

$(\vec{MH})' = \vec{MG}$  és  $(\vec{MG})' = \vec{MF}$ .  $MEF$ ;  $MFG$ ;  $MGH$  és  $MHE$  egyenlő szárú derékszögű háromszögek, a derékszög  $M$ -ben van.  $\Rightarrow EFGH$  négyzet.

**2392.** a) Jelöljük az ábra szerint a vektorokat, és ' -vel a  $(-90^\circ)$ -os elforgatottjukat (felhasználva, hogy a négyzet félátlói merőlegesek és egyenlők).  $\vec{XY} = \mathbf{x}' - \mathbf{y}$ ;  $\vec{BZ} = -\mathbf{x}' + \mathbf{x} - \mathbf{z}'$ . Tekintsük a  $C$ -ből kiindulva az egymáshoz fűzött, majd oda visszaérkező vektorokat.

$$-\mathbf{z} + \mathbf{z}' - \mathbf{x} + \mathbf{x}' - \mathbf{y} + \mathbf{y}' = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{x}' + \mathbf{y}' + \mathbf{z}' = (\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z})' \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{y} = -\mathbf{x} - \mathbf{z}. \vec{XY} = \mathbf{x}' + \mathbf{x} + \mathbf{z}; \quad (\vec{XY})' = (\mathbf{x}' + \mathbf{x} + \mathbf{z})' = \mathbf{x}'' + \mathbf{x}' + \mathbf{z}' = -\mathbf{x} + \mathbf{x}' + \mathbf{z}' = -\vec{BZ}. \vec{BZ} \text{ az}$$

$\vec{XY} + 90^\circ$ -os elforgatottja, ezért  $BZ = XY$  és  $BZ \perp XY$ . b) Az a) pontban látottakhoz hasonlóan belátható, hogy  $AY \perp ZX$  és  $CX \perp ZY$ .  $\Rightarrow AZ$ ;  $CX$  és  $BZ$  az  $XYZ\Delta$  magasságvonalai, ezért egy pontban metszik egymást.

**2393.** A 2394. ábra jelöléseit használjuk. Legyenek az  $A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$  pontokba mutató helyvektorok rendre  $\vec{A}, \vec{B}, \dots, \vec{C}_2$ . Jelölje  $a$  a  $+90^\circ$ -os elforgatás képét '.

$$\vec{C}_2 = \frac{\vec{C} + \vec{C}_1}{2}; \quad \vec{A}_2 = \frac{\vec{A} + \vec{A}_1}{2}; \quad \vec{B}_2 = \frac{\vec{B} + \vec{B}_1}{2}. \quad \vec{C}_2 \vec{A}_2 = \vec{A}_2 - \vec{C}_2 =$$

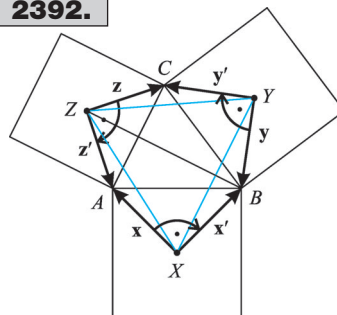
$$= \frac{\vec{A} - \vec{C}}{2} + \frac{\vec{A}_1 - \vec{C}_1}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}; \quad \vec{C}_2 \vec{B}_2 = \vec{B}_2 - \vec{C}_2 = \frac{\vec{B} - \vec{C}}{2} +$$

$$+ \frac{\vec{B}_1 - \vec{C}_1}{2} = \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{b}'}{2}; \quad (\vec{C}_2 \vec{A}_2)' = \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{b}'}{2} = \vec{C}_2 \vec{B}_2 \Rightarrow \vec{C}_2 \vec{A}_2 =$$

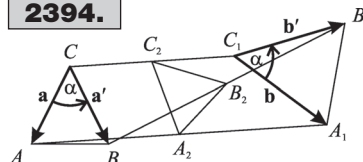
$$= \vec{C}_2 \vec{B}_2 \text{ és } \vec{C}_2 \vec{A}_2 \perp \vec{C}_2 \vec{B}_2 \Rightarrow \vec{A}_2 \vec{B}_2 \vec{C}_2 \Delta \text{ egyenlő szárú és derékszögű.}$$

**2394.** A 2393. feladat megoldásmenete teljes egészében megismételhető, csak a  $+90^\circ$ -os elforgatás képe helyett az

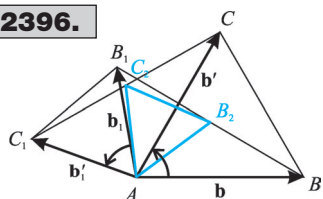
**2392.**



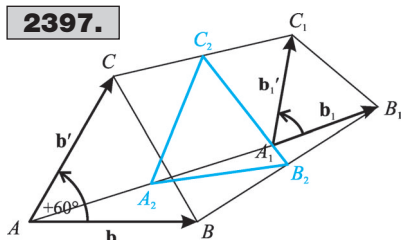
**2394.**



2396.



2397.

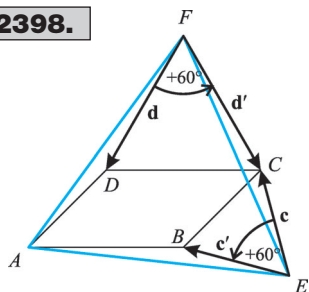


$$\vec{AC}_2 = \vec{C}_2 - \vec{A} = \frac{\vec{C} + \vec{C}_1}{2} - \vec{A} = \frac{\vec{C}_1 - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{C} - \vec{A}}{2} = \frac{\vec{b}'_1 + \vec{b}'}{2} \Rightarrow (\vec{AB}_2)' = \frac{\vec{b}'_1 + \vec{b}'}{2} = \vec{AC}_2.$$

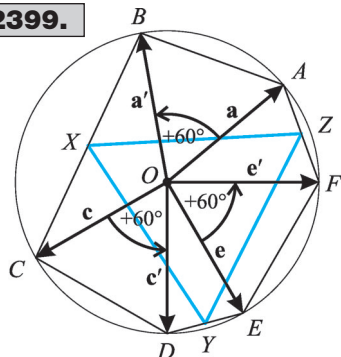
A fentiekből következik, hogy  $AC_2 = AB_2$  és  $B_2AC_2 \sphericalangle = 60^\circ \Rightarrow AB_2C_2\Delta$  szabályos.

**2397.** Legyenek az  $A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$  pontokba mutató helyvektorok rendre  $\vec{A}, \vec{B}, \dots, \vec{C}_2$ . Jelölje a  $+60^\circ$ -os elforgatás képét  $'$ .  $\vec{C}_2 = \frac{\vec{C} + \vec{C}_1}{2}$ ;  $\vec{A}_2 = \frac{\vec{A} + \vec{A}_1}{2}$ ;  $\vec{B}_2 = \frac{\vec{B} + \vec{B}_1}{2}$ .

2398.



2399.



$\alpha$  irányított szögű elforgatás képét jelöljük  $'$ -vel.  $(\vec{C}_2 \vec{A}_2)' = \vec{C}_2 \vec{B}_2 \Rightarrow C_2 A_2 = C_2 B_2$  és  $A_2 C_2 B_2 \sphericalangle = \alpha \Rightarrow C_2 A_2 B_2 \Delta \sim CAB \Delta$ .

**2395.** Legyen  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ;  $\vec{OA}' = \mathbf{a}'$ ;  $\vec{OA}'' = \mathbf{a}''$ . Az  $\mathbf{a}''$  az  $\mathbf{a}$  vektor  $+120^\circ$ -os elforgatottja, így  $OAA'\Delta$ -ben az  $\vec{AA}'$ -ral helyettesíthető. A vektorok különbségére tanult ábrázolásból következik, hogy  $\mathbf{a}'' = \mathbf{a}' - \mathbf{a}$ .

**2396.** Legyenek az  $A, B, C, B_1, C_1, B_2, C_2$  pontokba mutató helyvektorok rendre  $\vec{A}, \vec{B}, \dots, \vec{C}_2$ . Jelölje a  $+60^\circ$ -os elforgatás képét  $'$ .  $\vec{C}_2 = \frac{\vec{C} + \vec{C}_1}{2}$ ;  $\vec{B}_2 = \frac{\vec{B} + \vec{B}_1}{2}$ .  $\vec{AB}_2 = \vec{B}_2 - \vec{A} = \frac{\vec{B} + \vec{B}_1}{2} - \vec{A} = \frac{\vec{B}_1 - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{B} - \vec{A}}{2} = \frac{\vec{b}_1 + \vec{b}}{2}$ ;

$$\vec{A}_2 \vec{B}_2 = \vec{B}_2 - \vec{A}_2 = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{B}_1 - \vec{A}_1}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{b}_1}{2};$$

$$\vec{A}_2 \vec{C}_2 = \vec{C}_2 - \vec{A}_2 = \frac{\vec{C} - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{C}_1 - \vec{A}_1}{2} = \frac{\vec{b}' + \vec{b}'_1}{2};$$

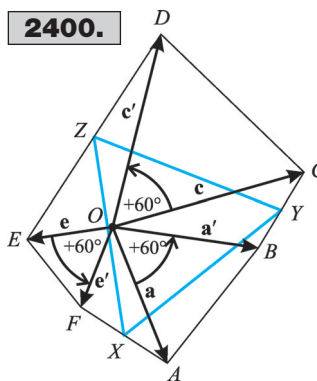
$(\vec{A}_2 \vec{B}_2)' = \frac{\vec{b}' + \vec{b}'_1}{2} = \vec{A}_2 \vec{C}_2$ . A fentiekből következik, hogy  $A_2 C_2 = A_2 B_2$  és  $B_2 A_2 C_2 \sphericalangle = 60^\circ \Rightarrow A_2 B_2 C_2 \Delta$  szabályos.

**2398.** Legyen  $\vec{FD} = \mathbf{d}$ ,  $\vec{EC} = \mathbf{c}$  és jelölje a  $+60^\circ$ -os elforgatás képét  $'$ .  $\vec{EF} = \mathbf{c} - \mathbf{d}'$ ;  $\vec{EA} = \mathbf{c}' + \mathbf{d} - \mathbf{d}'$ ;  $(\vec{EF})' = \mathbf{c}' - \mathbf{d}''$ . A 2395. feladat eredményét felhasználva  $\mathbf{d}'' = \mathbf{d}' - \mathbf{d} \Rightarrow (\vec{EF})' = \mathbf{c}' - (\mathbf{d}' - \mathbf{d}) = \mathbf{c}' - \mathbf{d}' + \mathbf{d} = \vec{EA} \Rightarrow EA = EF$  és  $FEA \sphericalangle = 60^\circ \Rightarrow FEA \Delta$  szabályos.

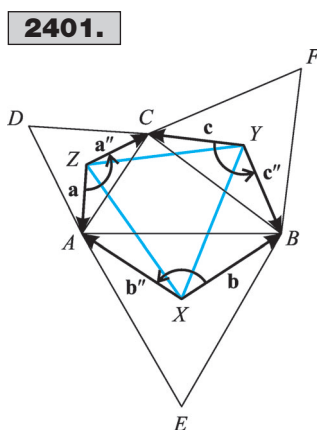
**2399.**  $CD = r$  és  $OC = r$  és  $OD = r$ , ezért  $CDO \Delta$  szabályos.  $\Rightarrow COD \sphericalangle = 60^\circ$ . Hasonlóan megmutatható, hogy  $EOF \sphericalangle = 60^\circ$  és  $AOB \sphericalangle = 60^\circ$ . Legyen  $\vec{OC} = \mathbf{c}$ ,  $\vec{OE} = \mathbf{e}$  és  $\vec{OA} = \mathbf{a}$  és jelölje a  $+60^\circ$ -os elforgatás képét  $'$ .  $\vec{X} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{a}'}{2}$ ;  $\vec{Y} = \frac{\mathbf{e} + \mathbf{c}'}{2}$ ;  $\vec{Z} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{e}'}{2}$ .  $\vec{YZ} = \vec{Z} - \vec{Y} =$

$= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{e}' - \mathbf{e} - \mathbf{c}'}{2}$ ;  $\vec{YX} = \vec{X} - \vec{Y} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{a}' - \mathbf{e} - \mathbf{c}'}{2}$ ;  $(\vec{YZ})' = \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{e}'' - \mathbf{e}' - \mathbf{c}''}{2}$ . A 2395. feladat eredményét felhasználva  $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}' - \mathbf{e}$  és  $\mathbf{c}'' = \mathbf{c}' - \mathbf{c}$ , így  $(\vec{YZ})' = \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{e}' - \mathbf{e} - \mathbf{c}' + \mathbf{c} - \mathbf{e}'}{2} = \frac{\mathbf{a}' - \mathbf{e} - \mathbf{c}' + \mathbf{c}}{2} = \vec{YX} \Rightarrow YX = YZ$  és  $\sphericalangle ZYX = 60^\circ$ , ezért  $XYZ\Delta$  szabályos.

**2400.** Legyen  $\vec{OC} = \mathbf{c}$ ,  $\vec{OE} = \mathbf{e}$  és  $\vec{OA} = \mathbf{a}$  és jelölje a  $+60^\circ$ -os elforgatás képét  $'$ . Szabályos háromszögekről lévén szó  $\vec{OD} = \mathbf{c}'$ ,  $\vec{OF} = \mathbf{e}'$  és  $\vec{OB} = \mathbf{a}'$ .  $\vec{Y} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{a}'}{2}$ ;  $\vec{Z} = \frac{\mathbf{e} + \mathbf{c}'}{2}$ ;  $\vec{X} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{e}'}{2}$ .  $\vec{ZX} = \vec{X} - \vec{Z} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{e}' - \mathbf{e} - \mathbf{c}'}{2}$ ;  $\vec{ZY} = \vec{Y} - \vec{Z} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{a}' - \mathbf{e} - \mathbf{c}'}{2}$ ;  $(\vec{ZX})' = \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{e}'' - \mathbf{e}' - \mathbf{c}''}{2}$ . A 2395. feladat eredményét felhasználva  $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}' - \mathbf{e}$  és  $\mathbf{c}'' = \mathbf{c}' - \mathbf{c}$ , így  $(\vec{ZX})' = \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{e}' - \mathbf{e} - \mathbf{c}' + \mathbf{c} - \mathbf{e}'}{2} = \frac{\mathbf{a}' - \mathbf{e} - \mathbf{c}' + \mathbf{c}}{2} = \vec{ZY} \Rightarrow ZX = ZY$  és  $\sphericalangle XZY = 60^\circ$ , ezért  $XYZ\Delta$  szabályos.

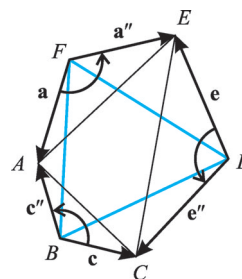


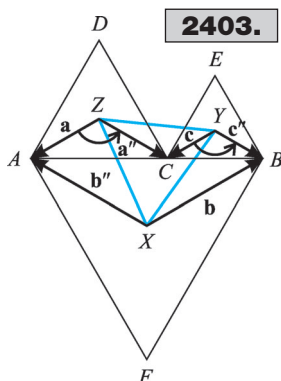
**2401.** Legyenek a szabályos háromszögek középpontjai  $X, Y$  és  $Z$ . Legyen  $\vec{YC} = \mathbf{c}$ ,  $\vec{XB} = \mathbf{b}$  és  $\vec{ZA} = \mathbf{a}$ . Jelölje a  $+60^\circ$ -os elforgatás képét  $'$ , a  $+120^\circ$ -os elforgatás képét  $''$ . Felhasználva, hogy  $\sphericalangle BXA = \sphericalangle CYB = \sphericalangle AZC = +120^\circ$ :  $\vec{YB} = \mathbf{c}'$ ,  $\vec{XA} = \mathbf{b}''$ ,  $\vec{ZC} = \mathbf{a}''$ .  $\vec{XY} = \mathbf{b} - \mathbf{c}''$ ;  $\vec{XZ} = \mathbf{b}'' - \mathbf{a}$ ;  $(\vec{XY})' = \mathbf{b}' - (\mathbf{c}'')' = \mathbf{b}' - (-\mathbf{c}) = \mathbf{b}' + \mathbf{c}$ .  $X$ -ből kiindulva vegyük sorra az egymásba fűzött vektorokat.  $\mathbf{b} - \mathbf{c}'' + \mathbf{c} - \mathbf{a}'' + \mathbf{a} - \mathbf{b}'' = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}'' + \mathbf{b}'' + \mathbf{c}'' \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \vec{XZ} = \mathbf{b}'' - \mathbf{a} = \mathbf{b}'' + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ . A 2395. feladat eredményét felhasználva  $\mathbf{b}'' = \mathbf{b}' - \mathbf{b}$ , így  $\vec{XZ} = \mathbf{b}' - \mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{b}' + \mathbf{c} = (\vec{XY})' \Rightarrow XZ = XY$  és  $\sphericalangle YXZ = 60^\circ$ , ezért  $XYZ\Delta$  szabályos.



**2402.** Legyen  $\vec{BC} = \mathbf{c}$ ,  $\vec{DE} = \mathbf{e}$  és  $\vec{FA} = \mathbf{a}$  és jelölje a  $+60^\circ$ -os elforgatás képét  $'$ , a  $+120^\circ$ -os elforgatás képét  $''$ . Felhasználva, hogy  $\sphericalangle CBA = \sphericalangle EDC = \sphericalangle AFE = +120^\circ$ ;  $\vec{BA} = \mathbf{c}'$ ,  $\vec{DC} = \mathbf{e}''$  és  $\vec{FE} = \mathbf{a}''$ .  $\vec{BD} = \mathbf{c} - \mathbf{e}''$ ;  $\vec{BF} = \mathbf{c}'' - \mathbf{a}$ ;  $(\vec{BD})' = \mathbf{c}' - (\mathbf{e}'')' = \mathbf{c}' - (-\mathbf{e}) = \mathbf{c}' + \mathbf{e}$ .  $B$ -ből kiindulva vegyük sorra az egymásba fűzött vektorokat.  $\mathbf{c} - \mathbf{e}'' + \mathbf{e} - \mathbf{a}'' + \mathbf{a} - \mathbf{c}'' = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{e} = \mathbf{a}'' + \mathbf{c}'' + \mathbf{e}'' \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{e} = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{e} \Rightarrow \vec{BF} = \mathbf{c}'' - \mathbf{a} = \mathbf{c}'' + \mathbf{c} + \mathbf{e}$ . A 2395. feladat eredményét felhasználva  $\mathbf{c}'' = \mathbf{c}' - \mathbf{c}$ , így  $\vec{BF} = \mathbf{c}' - \mathbf{c} + \mathbf{c} + \mathbf{e} = \mathbf{c}' + \mathbf{e} = (\vec{BD})' \Rightarrow BF = BD$  és  $\sphericalangle DBF = 60^\circ$ , ezért  $BDF\Delta$  szabályos.

**2402.**



**2403.**

**2403.** Legyenek a szabályos háromszögek középpontjai  $X$ ,  $Y$  és  $Z$ . Legyen  $\vec{YC} = \mathbf{c}$ ,  $\vec{XB} = \mathbf{b}$  és  $\vec{ZA} = \mathbf{a}$ , és jelölje a  $+60^\circ$ -os elforgatás képét  $'$ , a  $+120^\circ$ -os elforgatás képét  $''$ . Felhasználva, hogy  $BXA\angle = CYB\angle = AZC\angle = +120^\circ$ ;  $\vec{YB} = \mathbf{c}'$ ,  $\vec{XA} = \mathbf{b}''$  és  $\vec{ZC} = \mathbf{a}''$ .  
 $\vec{XY} = \mathbf{b} - \mathbf{c}''$ ;  $\vec{XZ} = \mathbf{b}'' - \mathbf{a}$ ;  $(\vec{XY})' = \mathbf{b}' - (\mathbf{c}'')' = \mathbf{b}' - (-\mathbf{c}) = \mathbf{b}' + \mathbf{c}$ .  
 $X$ -ből kiindulva vegyük sorra az egymásba fűzött vektorokat.  
 $\mathbf{b} - \mathbf{c}'' + \mathbf{c} - \mathbf{a}'' + \mathbf{a} - \mathbf{b}'' = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}'' + \mathbf{b}'' + \mathbf{c}'' \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \vec{XZ} = \mathbf{b}'' - \mathbf{a} = \mathbf{b}'' + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ . A 2395. feladat eredményét felhasználva  $\mathbf{b}'' = \mathbf{b}' - \mathbf{b}$ , így  $\vec{XZ} = \mathbf{b}' - \mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{b}' + \mathbf{c} = (\vec{XY})' \Rightarrow XZ = XY$  és  $YXZ\angle = 60^\circ$ , ezért  $XYZ\Delta$  szabályos.

## Műveletek koordinátákkal megadott vektorokkal

**2404.** Legyen a kezdőpont az origó. Alkalmazzuk a  $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$  képletet, ahol  $v_1$  és  $v_2$  a  $\mathbf{v}$  vektor koordinátái. Ekkor  $|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$ ;  $|\mathbf{b}| = \sqrt{34}$ ;  $|\mathbf{c}| = \sqrt{73}$ ;  $|\mathbf{d}| = 4$ ;  
 $|\mathbf{e}| = \sqrt{153}$ ;  $|\mathbf{f}| = \frac{\sqrt{2404}}{15}$ ;  $|\mathbf{g}| = \sqrt{10}$ ;  $|\mathbf{h}| = \sqrt{12 - \sqrt{5} + 4,5\sqrt{2}}$ . Ha a vektorok kezdőpontja az  $(5; 5)$  koordinátájú pont, a vektorok abszolútértéke nem változik. Ekkor például az  $\mathbf{a}$  vektor kezdőpontja az  $(5; 5)$ , végpontja a  $(9; 11)$  koordinátájú pont.

$|\mathbf{a}| = \sqrt{(9-5)^2 + (11-5)^2} = 2\sqrt{13}$ .  $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{b} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{c} = -8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{d} = -4\mathbf{j}$ ;

$\mathbf{e} = 12\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{f} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - 3,2\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{g} = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{8}\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{h} = \frac{\sqrt{20}-1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{18}+3}{2}\mathbf{j}$ .

**2405.**  $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ . Alkalmazzuk a  $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$  képletet, ahol  $v_1, v_2, v_3$  a  $\mathbf{v}$  vektor koordinátái. Ekkor  $|\mathbf{a}| = 3\sqrt{5}$ ;  $|\mathbf{b}| = \sqrt{29}$ ;  $|\mathbf{c}| = \sqrt{109}$ ;  $|\mathbf{d}| = 5\sqrt{17}$ .

**2406.** A feladat megoldását az olvasóra bizzuk.

**2407.** Az  $\mathbf{m} = (a; b)$ ;  $\mathbf{n} = (b; a)$  helyvektorok egymás tükörképei az  $y = x$  egyenletű (az origón átmenő és az első és a harmadik síknegyedtet felező) egyenesre.

**2408.** a)  $(3; -4)$  és így tovább; b)  $(-3; 4)$  és így tovább; c)  $(-3; -4)$ ;  $(4; -2)$ ;  $(-4; 5)$ ;  $(-5; 0)$ ;  $(0; 3)$ ;  $(-p; -q)$ ; d)  $(4; 3)$ ;  $(2; -4)$ ;  $(-5; 4)$ ;  $(0; 5)$ ;  $(-3; 0)$ ;  $(q; p)$ ; e)  $(-4; -3)$ ;  $(-2; 4)$ ;  $(5; -4)$ ;  $(0; -5)$ ;  $(3; 0)$ ;  $(-q; -p)$ .

**2409.**  $C_1(5; 6)$ ,  $C_2(-5; 6)$ ,  $C_3(-5; -6)$ ,  $C_4(5; -6)$ . Pitagorasztételét alkalmazva

$m^2 = 8^2 - 6^2 = 28$ ,  $m = 2\sqrt{7}$ . A megoldás:  $C_1(6; 2\sqrt{7})$ ,  $C_2(-6; 2\sqrt{7})$ ,  $C_3(-6; -2\sqrt{7})$ ,  $C_4(6; -2\sqrt{7})$ .

**2410.** a)  $AC = a\sqrt{2}$ , így  $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ ,  $B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ ,  $D\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ ;

b)  $A\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ ,  $B\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ ,  $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$ ,  $D\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$ .

$$2411. \left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right), \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right), \left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right), \left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right), \left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right), \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right), \left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right), \left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right).$$

2412. a) A szabályos hatszög tulajdonságai miatt  $ABO$  háromszög szabályos. Pitagorasz tételéből:  $m^2 = 4^2 - 2^2 = 12$ ,  $m = 2\sqrt{3}$ . A csúcspontok:  $A(4; 0)$ ,  $B(2; 2\sqrt{3})$ ,  $C(-2; 2\sqrt{3})$ ,  $D(-4; 0)$ ,  $E(-2; -2\sqrt{3})$ ,  $F(2; -2\sqrt{3})$ , illetve

$$A(2a; 0), B(a; a\sqrt{3}), C(-a; a\sqrt{3}), D(-2a; 0), E(-a; -a\sqrt{3}), F(a; -a\sqrt{3}).$$

b)  $(0; 4)$ ,  $(2\sqrt{3}; 2)$ ,  $(2\sqrt{3}; -2)$ ,  $(0; -4)$ ,  $(-2\sqrt{3}; -2)$ ,  $(-2\sqrt{3}; 2)$ , illetve  $(0; 2a)$ ,  $(-a\sqrt{3}; a)$ ,  $(-a\sqrt{3}; -a)$ ,  $(0; -2a)$ ,  $(a\sqrt{3}; -a)$ ,  $(a\sqrt{3}; a)$ .

2413. 233. ábra

2414. a)  $a'(-3; -2)$ ,  $a''(3; -2)$ ; e)  $e'(-b; a)$ ,  $e''(b; -a)$ ; f)  $f'(-\cos \alpha; \sin \alpha)$ ,  $f''(\cos \alpha; -\sin \alpha)$ .

$$2415. 1. (-1; 7). 2. (5; 10). 3. (10; -7). 4. -2\mathbf{b}(8; -4), \mathbf{a} - 2\mathbf{b}(11; 1). 5. \frac{1}{2}\mathbf{a}\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right), \frac{2}{3}\mathbf{b}\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right), \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}\left(-\frac{7}{6}; \frac{23}{6}\right). 6. \left(-1; \frac{2}{3}\right). 7. \left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right).$$

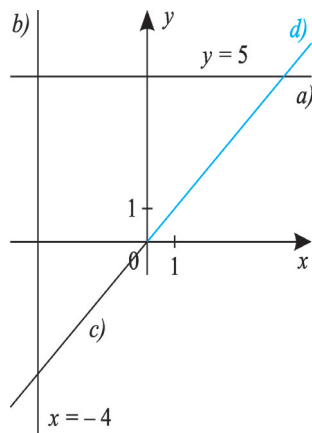
2416.  $\vec{AB}(-2; 7)$ ,  $\vec{BC}(-8; -1)$ ,  $\vec{CA}(10; -6)$ .  $|\vec{AB}| = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$ ,  $|\vec{BC}| = \sqrt{89}$ ,  $|\vec{CA}| = \sqrt{104}$ ,  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = (-2; 7) + (-8; -1) + (10; -6) = (0; 0) = \mathbf{0}$ ;  $|\vec{AB}| + |\vec{BC}| + |\vec{CA}| = 26,9$ .

2417.  $\vec{AB}(-8; 4)$ ,  $\vec{BC}(-4; -11)$ ,  $\vec{CA}(12; 7)$ ,  $\vec{DA}(5; 16)$ .

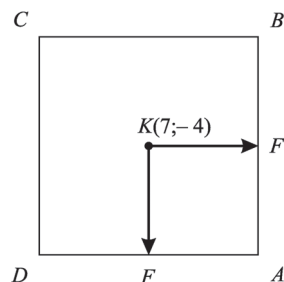
2418.  $\vec{KF}'(-4; -10)$ ,  $\vec{KA} = \vec{KF} + \vec{KF}'$ ,  $\vec{KA}(-14; -6)$ . Legyen  $O$  az origó. Ekkor  $\vec{OA} = \vec{OK} + \vec{KA}$ ,  $\vec{OA}(-7; -10)$ ,  $A(-7; -10)$ .  $-\vec{KA} = \vec{KC}(14; 6)$ ,  $\vec{OC} = \vec{OK} + \vec{KC}$ ,  $\vec{OC}(21; 2)$ ,  $C(21; 2)$ .  $\vec{KB}(6; -14)$ ,  $\vec{OB} = \vec{OK} + \vec{KB}$ ,  $\vec{OB}(13; -18)$ ,  $B(13; -18)$ ,  $-\vec{KB} = \vec{KD}$ , ebből  $D(1; 10)$ .

2419.  $\vec{AB}(2; 5)$ ,  $\vec{DC}(2; 5) \Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow ABCD$  paralelogramma;  $\vec{AD}(5; -2) \Rightarrow |\vec{AB}| = |\vec{AD}|$ ,  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 \Rightarrow ABCD$  négyzet.

2413.



2418.



**2420.**  $|\mathbf{a}| = \sqrt{73}$ ;  $\mathbf{a}^0 \left( \frac{8}{\sqrt{73}}; \frac{3}{\sqrt{73}} \right)$ ;  $|\mathbf{b}| = 2\sqrt{10}$ ;  $\mathbf{b}^0 \left( -\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$ ;  $|\mathbf{c}| = \sqrt{106}$ ;  
 $\mathbf{c}^0 \left( \frac{5}{\sqrt{106}}; -\frac{9}{\sqrt{106}} \right)$ ;  $|\mathbf{d}| = \sqrt{58}$ ;  $\mathbf{d}^0 \left( -\frac{7}{\sqrt{58}}; -\frac{3}{\sqrt{58}} \right)$ .

**2421.** Az  $A, B, C, D, K$  pontokhoz vezessenek az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{k}$  helyvektorok. Ekkor  $\vec{KA} = \mathbf{a} - \mathbf{k}(-4; -2)$ ,  $\vec{KC}(4; 2)$ .  $\mathbf{c} = \vec{KC} + \mathbf{k}$ . Innen  $\mathbf{c}(5; 11)$ ,  $C(5; 11)$ .  $\vec{KB}$  a  $\vec{KA}$  90°-os elforgatottjának  $\frac{1}{2}$ -szerese, tehát  $\vec{KB}(1; -2)$ .  $\mathbf{b} = \mathbf{k} + \vec{KB} \Rightarrow \mathbf{b}(2; 7)$ ,  $B(2; 7)$ .  $\vec{KD}(-1; 2)$ ,  $\mathbf{d}(0; 11)$ ,  $D(0; 11)$ .

**2422.**  $a = -\frac{2 \sin \frac{39+13}{2} \cdot \cos \frac{39-13}{2}}{\sin 26^\circ \cdot \cos 13^\circ} = -2$ ;  $b = \sqrt{10^2 \cdot 10^{\lg 25}} = \sqrt{10^2 \cdot 25} = 50$ ;

$c = (\sqrt{5} + 2)^3 - (\sqrt{5} - 2)^3$ , mert  $(\sqrt{5} + 2) \cdot (\sqrt{5} - 2) = 1$ .

$c = 4[(\sqrt{5} + 2)^2 + (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} - 2) + (\sqrt{5} - 2)^2] = 4 \cdot 19 = 76$ .

$\vec{AB}(2; 52)$ ,  $\vec{BC}(1; 26)$ . Mivel  $\vec{AB} = 2 \cdot \vec{BC}$ , ezért a 3 pont egy egyenesre illeszkedik.

**2423.**  $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ ;  $|\mathbf{b}| = \sqrt{29}$ .

**2424.** a)  $|\mathbf{a}| = \sqrt{42}$ ,  $\mathbf{a}^0 \left( \frac{1}{\sqrt{42}}; \frac{4}{\sqrt{42}}; \frac{5}{\sqrt{42}} \right)$ , b)  $\mathbf{a}^0 \left( -\frac{3}{\sqrt{29}}; -\frac{2}{\sqrt{29}}; -\frac{4}{\sqrt{29}} \right)$ ,

c)  $\mathbf{a}^0 \left( \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ .

## Két vektor skaláris szorzata

**2425.** Az oldalhossz négyzetének a  $\frac{3}{2}$ -szerese.

**2426.** 43,5.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \alpha$  és  $\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{bc} \cdot \cos \alpha = \mathbf{a}^2 \Rightarrow |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \alpha = \frac{\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2}{2}$ .

**2427.** Bontsuk fel  $\mathbf{a}$ -t a  $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre. A  $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos összetevő  $-k\mathbf{b}$ .

**2428.**  $\cos(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \cos \alpha = \frac{19\sqrt{43}}{215}$ .  $(3\mathbf{a} - 5\mathbf{b})(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0$  és  $(\mathbf{a} + 4\mathbf{b})(-\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6a^2 - 7ab \cos \alpha - 5b^2 = 0$  és  $-a^2 - 3ab \cos \alpha + 4b^2 = 0 \Rightarrow 6\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\left(\frac{a}{b}\right) \cos \alpha - 5 = 0$  és

$-\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{b}\right) \cos \alpha + 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\sqrt{43}}{5}$ ;  $\cos \alpha = \frac{19\sqrt{43}}{215}$ .

**2429.**  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 40^\circ = 15,32$ .

**2430.**  $a) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 24 + 24 = 48$ ;  $|\mathbf{a}| = \sqrt{16 + 9} = 5$ ;  $|\mathbf{b}| = 10$ ;  $48 = 5 \cdot 10 \cdot \cos(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \Rightarrow \cos(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = 0,96 \Rightarrow (\mathbf{a}; \mathbf{b}) \sphericalangle = 16,26^\circ$ .  $b) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -7$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \sphericalangle = 105,1^\circ$ .  $c) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 48$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \sphericalangle = 67,2^\circ$ .  $d) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \sphericalangle = 88,9^\circ$ .

**2431.**  $a) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1 + 6 - 35 = -30$ ;  $b) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 11$ ;  $c) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 27$ ;  $d) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sqrt{6} - 58$ .

**2432.**  $a) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2 + 15 - 28 = -15$ ,  $|\mathbf{a}| = \sqrt{1 + 9 + 49} = \sqrt{59}$ ,  $|\mathbf{b}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ ,  
 $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\frac{15}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{59}} = -0,2911$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \sphericalangle = 106,9^\circ$ .  $b) 30,8^\circ$ ;  $c) 122,7^\circ$ .

**2433.**  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -6 \cdot 12 + 4y = 0 \Rightarrow y = 18$ .

**2434.**  $\vec{AC}(10; -5)$ ,  $\vec{AB}(6; 75)$ ,  $\vec{AB} - k \cdot \vec{AC}(6 - 10k; 7 + 5k)$ ,  $\vec{AC} \cdot (\vec{AB} - k \cdot \vec{AC}) =$   
 $= 10(6 - 10k) - 5(7 + 5k) = 0$ ,  $12 - 20k - 7 - 5k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$ .

**2435.**  $\vec{CA}(9; 3)$ ,  $\vec{CB}(2; -6)$ ,  $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0 \Rightarrow \vec{CA} \perp \vec{CB}$ .

**2436.**  $\vec{AB}(10; 12)$ ,  $\frac{1}{2}\vec{AB}(5; 6)$   $90^\circ$ -os elforgatottja  $\vec{AD}_1(-6; 6)$ , illetve  $\vec{AD}_2(6; -5)$ ,  
 $\vec{OD}_1 = \vec{OA} + \vec{AD}_1$ ,  $\vec{OD}_1(-8; 9)$ ,  $\vec{OD}_2 = \vec{OA} + \vec{AD}_2$ ,  $\vec{OD}_2(4; -1)$ .  $\vec{BC}_1 = \vec{AD}_1$ ,  $\vec{BC}_2 = \vec{AD}_2$ ,  
 $\vec{OC}_1 = \vec{OB} + \vec{BC}_1$ ,  $\vec{OC}_1(2; 21)$ ,  $\vec{OC}_2(14; 11)$ .  $C_1(2; 21)$ ,  $D_1(-8; 9)$ , illetve  $C_1(14; 11)$ ,  
 $D_2(4; -1)$ .

**2437.**  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -10 - 2 - 3z = 0 \Rightarrow z = -4$ .

**2438.**  $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = p^2 + (p+1)^2 + p^2(p+1)^2 = p^2 + (p+1)^2(1+p^2) \Rightarrow |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$ .

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -p^2(p+1) - p(p+1) + (p+1)^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ .

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = -p(p+1) + p(p+1)^2 - p^2(p+1) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{c}$ .

**2439.**  $a) \vec{AB}(3; 5)$ ,  $|\vec{AB}| = \sqrt{34}$ ,  $\vec{AC}(5; 1)$ ,  $|\vec{AC}| = \sqrt{26}$ ,  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 15 + 5 = 20$ .  
 $20 = \sqrt{34} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 47,7^\circ$ . Hasonlóan kiszámítható  $\beta = 57,5^\circ$ ,  $\gamma = 74,8^\circ$ .

$b) \vec{BA}(-2; -1)$ ,  $\vec{BC}(1; -2)$ ,  $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow \gamma = 90^\circ$ .  $|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = \sqrt{5} \Rightarrow \alpha = \beta = 45^\circ$ ;

$c) 101,9^\circ$ ,  $48,2^\circ$ ,  $29,9^\circ$ ;  $d) 81,9^\circ$ ,  $74,1^\circ$ ,  $24^\circ$ .

**2440.**  $|\vec{CA}| = \sqrt{17}$ ,  $|\vec{BA}| = \sqrt{38}$ ,  $|\vec{CB}| = \sqrt{19}$ ,  $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 1$ ,  $\vec{CA} \cdot \vec{BA} = 18$ .

$\cos \alpha = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{BA}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{BA}|} = \frac{18}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{38}} = 0,7082 \Rightarrow \alpha = 44,9^\circ$ .  $\cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{19}} =$   
 $= -0,0556 \Rightarrow \gamma = 93,2^\circ$ ,  $\beta = 41,9^\circ$ .

**2441.** Legyen  $\mathbf{x}(a; b; c)$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 5a - b + 2c = 0$ ,  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = -2a + 3b + c = 0$ .

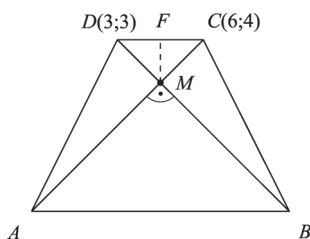
$\left. \begin{array}{l} -b + 2c = -5a \\ 3b + c = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow c = -\frac{13}{7}a$ ,  $b = \frac{9}{7}a$ .  $\mathbf{x}\left(a; \frac{9}{7}a; -\frac{13}{7}a\right)$ , illetve  $\mathbf{x}(7a; 9a; -13a)$ , ahol

$a \in \mathbf{R}$ .

**2442.** Legyen  $\mathbf{e}(a; b)$ ,  $\mathbf{f}(c; d)$ ,  $|\mathbf{e}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $|\mathbf{f}| = \sqrt{c^2 + d^2}$ .  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = ac + db$ .

$\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = |\mathbf{e}| \cdot |\mathbf{f}| \cdot \cos(e, f) \leq |\mathbf{e}| \cdot |\mathbf{f}|$ , behelyettesítve:  $ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$ .





2443.

**2443.**  $ABM\Delta \sim CDM\Delta$  egyenlő szárú derékszögű háromszögek.

$F\left(\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)$ .  $\vec{FC}\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$  90°-os elforgatottjai  $\vec{FM}_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ ,  
 $\vec{FM}_2\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ . Ha 0 az origó,  $\vec{OM}_1 = \vec{OF} + \vec{FM}_1$ , illetve  $\vec{OM}_2 =$   
 $= \vec{OF} + \vec{FM}_2$ . Innen  $M_1(5; 2)$ ,  $M_2(4; 5)$ .  $\vec{M}_1\vec{C} = \vec{OC} - \vec{OM}_1$   
 $\vec{M}_1\vec{C}(1; 2)$ ,  $-3\vec{M}_1\vec{C} = \vec{M}_1\vec{A}(-3; -6)$ ;  $\vec{OA} = \vec{OM}_1 + \vec{M}_1\vec{A}$ ,  
 $\vec{OA}(2; -4)$ ,  $A_1(2; -4)$ ,  $\vec{OB}_1(11; -1)$ ,  $B_1(11; -1)$ . Hasonlóan  
 $M_2$ -ből  $A_2(-2; 8)$ ,  $B_2(7; 11)$ .

**2444.**  $|\mathbf{a}| = 10$ ,  $\mathbf{a}^0\left(\frac{8}{10}; \frac{6}{10}\right)$ ,  $|\mathbf{a}^0| = 1$ . Ha  $\mathbf{a}^0$  irányszöge  $\alpha$ , akkor  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .

Legyen  $|\mathbf{e}| = 1$ , irányszöge:  $(\alpha \pm 60^\circ)$ .  $\sin \varphi = \sin(\alpha \pm 60^\circ) = \sin \alpha \cdot \cos 60^\circ \pm \cos \alpha \cdot \sin 60^\circ =$   
 $= \frac{3 \pm 4\sqrt{3}}{10}$ ,  $\cos \varphi = \frac{4 \pm 3\sqrt{3}}{10}$ .  $\mathbf{e}\left(\frac{4 \pm 3\sqrt{3}}{10}; \frac{3 \pm 4\sqrt{3}}{10}\right)$ .  $\mathbf{b} = k\mathbf{e}$ , ahol  $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

**2445.**  $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ ,  $\begin{cases} 6 = 4\alpha + 2\beta \\ 4 = \alpha + 2\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3}$ ,  $\beta = \frac{1}{3}$ .  $\alpha\mathbf{a}\left(\frac{16}{3}; \frac{4}{3}\right)$ ,  $\beta\mathbf{b}\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$ ,

$$\mathbf{v} = \frac{4}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}.$$

**2446.**  $\mathbf{v} = -\frac{4}{3}\mathbf{a} + \frac{5}{6}\mathbf{b}$ . **2447.**  $\mathbf{v} = \frac{6}{5}\mathbf{a} + \frac{8}{5}\mathbf{b}$ .

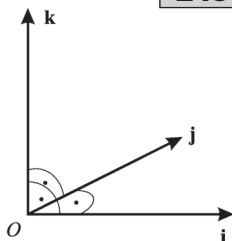
**2448.** Legyen  $\mathbf{e}(\cos \alpha; \sin \alpha)$  a szögfelezőre illeszkedő egységvektor.  $(\mathbf{a}, \mathbf{e})\sphericalangle = (\mathbf{b}, \mathbf{e})\sphericalangle = \varphi$ .

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{e}| \cdot \cos \varphi$ ,  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{e}| \cdot \cos \varphi$ . Ezekből  $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{a}| \cdot 1} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{b}| \cdot 1}$ , ahol  $|\mathbf{a}| = 5$ ,  $|\mathbf{b}| = 13$ .

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = 3 \cos \alpha + 4 \sin \alpha$ ,  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{e} = 5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha$ ,  
 $\frac{3 \cos \alpha + 4 \sin \alpha}{5} = \frac{5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha}{13} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{7}{4}$ .  $\mathbf{e} \parallel \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}(4; 7)$ . A  $k \cdot \mathbf{v}$  is kielégíti a feladat feltételeit, ahol  $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

## Két vektor vektoriális szorzata

2450.



**2449.** A vektoriális szorzat definíciója szerint  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin |(\mathbf{a}, \mathbf{b})\sphericalangle|$ . Ez a pozitív valós szám annak a paralelogrammának a területe, amelynek oldalai  $|\mathbf{a}|$  és  $|\mathbf{b}|$  hosszúságúak és a hajlásszögük  $\alpha = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\sphericalangle$ .

**2450.** Alkalmazzuk a vektoriális szorzat definícióját és tekintjük az 2450. ábra jobbrésztét. Ekkor az ábráról leolvashatjuk a feladat állításainak helyességét!

**2451.**  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  és  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ . A szorzás elvégzésekor az  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  vektoriális szorzás két (bizonyítható) tulajdonságát használjuk fel.

a) A vektoriális szorzatot úgy szorozhatjuk meg egy számmal, hogy egyik tényezőjét szorozzuk!  $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$ . (Ebből következik, hogy  $(-1)(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ .)

b) A vektoriális szorzás disztributív tulajdonságú, azaz például  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \mathbf{b} \times \mathbf{d}$ . Ekkor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$ , mert  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ , továbbá  $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ .

**2452.** a)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = 2(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + 4(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + 2(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + 3(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + 6(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + 3(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) - 2(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) - 4(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) - 2(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) = -7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ;  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{49 + 16 + 1} = \sqrt{66}$ .

b)  $-2\mathbf{j}$ ;  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 2$ . c)  $29\mathbf{i} - 22\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ;  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{1334}$ .

**2453.** a)  $t_{ABCD} = |\vec{AB} \times \vec{BC}| = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \sin \varphi$ , ahol  $\varphi$  az  $\vec{AB}$  és a  $\vec{BC}$  vektorok által bezárt szög.  $|\vec{AB}| = 2$ ,  $|\vec{BC}| = \sqrt{3}$ , mert  $\vec{BC}(-1; 1; 1)$ .  $\vec{AC}(1; 1; 1)$ ,  $|\vec{AC}| = \sqrt{3}$ .

A  $\varphi$  szög kiszámítható a koszinusztétellel.  $3 = 3 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cos \varphi$ , innen  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$  és

$\sin \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $t_{ABCD} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{8}$  egység. b)  $\sqrt{424}$ .

**2454.** a)  $t = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \sin \varphi$ , ahol  $\varphi$  az  $A$  csúcsnál fekvő szög.  $|\vec{AB}| = \sqrt{24}$ ;  $|\vec{AC}| = \sqrt{5}$ ;  $|\vec{BC}| = \sqrt{13}$ . Ekkor  $\cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{30}}$ , a koszinusztétel alkalmazásával,

$\sin \varphi = \sqrt{\frac{7}{15}}$ ;  $t = \sqrt{14}$ . b)  $\sqrt{11}$ .

**2455.**  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ;  $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\mathbf{b}, \mathbf{a})$  és  $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\sin(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ ;  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin 0 = \mathbf{0}$ .

